WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

3. Mai 2018

10. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*
Wir betrachten die Menge $X = \{(x,y) \in [0,\,1] \times [0,\,1] \mid x = 0 \vee y = 0 \vee \exists n \in \mathbb{N} : y = \frac{1}{n}\}$.

a) Skizzieren Sie X!

b) Ist X semialgebraisch?

c) Ist X zusammenhängend?

d) Ist X lokal zusammenhängend?

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*
$f\colon X \to Y$ sei eine bijektive semialgebraische Abbildung von $X \subseteq \mathbb{R}^n$ auf $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, daß dann auch die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon Y \to X$ semialgebraisch ist!

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*
$X \subseteq \mathbb{R}^n$ sei eine semialgebraische Menge und $\mathcal{I} = \{A_1, \ldots, A_r\}$ sei eine Zerlegung von $\mathbb{R}^n$ gemäß erstem Struktursatz derart, daß X die Vereinigung gewisser Mengen $A_k \in \mathcal{I}$ ist. Wir nennen zwei Mengen A_k, A_ℓ *benachbart,* wenn eine der beiden nichtleeren Durchschnitt mit dem Abschluß der anderen hat. Zeigen Sie: X ist genau dann (weg-)zusammenhängend, wenn es zu je zwei Mengen $A_k, A_\ell \subseteq X$ eine Folge von Indizes $k_0 = k, k_1, \ldots, k_m = \ell$ gibt, so daß A_{k_i} und $A_{k_{i+1}}$ fur jedes $i = 0, \ldots, m-1$ benachbart sind!
Hinweis: Beachten Sie, daß jede Menge A_k homöomorph zu einem Würfel ist.

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*
Die Polynome $f = x^5y^3 - 3x^5y^2 + 3x^5y - x^5$ und

$$\begin{aligned} g = {} & x^4y^4 - 16x^4y^3 - 12x^3y^4 + 86x^4y^2 + 192x^3y^3 + 44x^2y^4 \\ & - 176x^4y - 1032x^3y^2 - 704x^2y^3 - 48xy^4 + 105x^4 + 2112x^3y + 3784x^2y^2 + 768xy^3 \\ & - 1260x^3 - 7744x^2y - 4128xy^2 + 4620x^2 + 8448xy - 5040x \end{aligned}$$

haben den ggT $xy - x$. (Das soll *nicht* nachgerechnet werden!)

a) Zeigen Sie, daß für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x_0, y_0) = 0$ auch $g(x_0, y_0)$ verschwindet!
Hinweis: Versuchen Sie zunächst, f in einer einfacheren Form zu schreiben.

b) Finden Sie den kleinsten Exponenten n derart, daß f ein Teiler von g^n ist!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 9. Mai 2018, um 12.00 Uhr