Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

29. März 2018

6. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Mit welcher der Mengen $\mathcal{T}_i$ wird $\mathbb{R}^n$ ein topologischer Raum?

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\}, \quad \mathcal{T}_2 = \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \text{ (die Potenzmenge von } \mathbb{R}^n\text{)}$$

$$\mathcal{T}_3 = \left\{ U \subset \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{zu jedem } x \in U \text{ gibt es ein } \varepsilon > 0\text{, so} \\ \text{daß alle } y \text{ mit } \|x-y\| < \varepsilon \text{ in } U \text{ liegen}\end{array} \right\}, \quad \mathcal{T}_4 = \{U \subset \mathbb{R}^n \mid \mathbb{R}^n \setminus U \in \mathcal{T}_3\}$$

$$\mathcal{T}_5 = \{U \subseteq \mathbb{R}^n \mid U \text{ ist endlich}\}, \quad \mathcal{T}_6 = \{U \subseteq \mathbb{R}^n \mid \mathbb{R}^n \setminus U \text{ ist endlich}\}$$

b) Welche dieser Räume sind kompakt?

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die Parabel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist!

b) Finden Sie eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$, die homöomorph zur Hyperbel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ ist!

c) Ist die Abbildung, die der Äquivalenzklasse des Punktes (z_1, z_2) im symmetrischen Produkt $\mathbb{C}^{(2)}$ den Punkt $(z_1^2 + z_2^2, z_1 z_2) \in \mathbb{C}^2$ zuordnet, ein Homöomorphismus?

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ trage die Spurtopologie, und $Y = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ die Quotiententopologie. Zeigen Sie, daß X und Y homöomorph sind!

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ seien topologische Räume und $\mathcal{T}_/ = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$. Warum ist $(X \times Y, \mathcal{T}_0)$ im allgemeinen kein topologischer Raum?

b) Bestimmen Sie die kleinste Teilmenge $\mathcal{T}$ von $\mathfrak{P}(X \times Y)$, die $\mathcal{T}_0$ enthält und mit der $(X \times Y, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum ist!

c) Zeigen Sie: Für jedes $x \in X$ ist $\{x\} \times Y$, versehen mit der Spurtopologie als Teilmenge von $(X \times Y, \mathcal{T})$, homöomorph zu Y.

d) X trägt die Quotiententopologie bezüglich der Projektion $\pi: X \times Y \to X$.

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 11. April 2018, um 12.00 Uhr