Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

3. März 2018

3. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Resultante der beiden Polynome $f = X^3 + 2X + 1$ und $g = X^2 + 3$!

b) Für welche Primzahlen p gibt es eine ganze Zahl x, für die sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ durch p teilbar sind?
Hinweis: Betrachten Sie f *und* g *als Polynome in* $\mathbb{F}_p[X]$.

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Für welche Werte von Y haben die beiden Polynome $f = X^2 + XY + Y$ und $g = X^2 - Y^2$ aus $\mathbb{Q}[X, Y]$ einen gemeinsamen Faktor positiven Grades?

b) Geben Sie diesen Faktor jeweils an!

c) Bestimmen Sie alle Paare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die $f(x, y) = g(x, y) = 0$ ist!

Aufgabe 3: *(7 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Wenn eine kubische Gleichung mit reellen Koeffizienten eine mehrfache Nullstelle hat, sind alle ihre Nullstellen reell.

b) Konstruieren Sie mit Hilfe einer geeigneten Resultante ein Polynom in p und q, das genau dann verschwindet, wenn die kubische Gleichung $x^3 + px + q = 0$ eine mehrfache Nullstelle hat!

c) Welche Bedingungen müssen p und q erfüllen, damit die Gleichung eine dreifache Nullstelle hat?

d) Geben Sie ein Polynome in a, b, c an, die genau dann verschwinden, wenn die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c$ eine dreifache Nullstelle hat!

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

Die Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ sei parametrisch gegeben durch die Vorschrift $x = t^2 + 1$ und $y = t^2 - t$. Finden Sie ein Polynom $F \in \mathbb{R}[X, Y]$, das auf allen Kurvenpunkten verschwindet!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 8. März 2018, um 12.00 Uhr