Wolfgang K. Seiler — A5, C201
Tel. 2515

22. April 2015

8. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Vollziehen Sie den Beweis des Struktursatzes explizit nach am Beispiel der Kurve

$$X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y^2 = x\right\}\,!$$

b) Welche der Zerlegungsmengen des $\mathbb{R}^2$ könnte man für eine effizientere Zerlegung vereinigen?

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

a) Finden Sie für die Kreisscheibe $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 < 1\right\}$ eines Zerlegung von $\mathbb{R}^2$, die den Bedingungen des Struktursatzes genügt! (Das muß nicht die im Beweis konstruierte Zerlegung sein; es gibt einfachere!)

b) Konstruieren Sie daraus eine entsprechende Zerlegung des $\mathbb{R}^3$ für die Sphäre

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}\,!$$

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

Für $m \in \mathbb{N}$ sei $W_m = (0, 1)^m$ der m-dimensionale Würfel; für $m = 0$ setzen wir formal $W_0 = \{0\}$. Weiter sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine semialgebraische Menge. Zeigen Sie:

a) Ist $\mathcal{I} = \{A_1, \dots, A_r\}$ eine Zerlegung des $\mathbb{R}^n$ für X gemäß dem Struktursatz, so gibt es für jedes A_i ein m_i und eine bijektive stetige Abbildung $\varphi_i \colon W_{m_i} \to A_i$.

b) Auch die Umkehrabbildung φ_i^{-1} ist stetig.

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

Wir betrachten die Menge $X = \left\{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \;\middle|\; x = 0 \lor y = 0 \lor \exists n \in \mathbb{N} : y = \frac{1}{n}\right\}$.

a) Skizzieren Sie X!

b) Ist X semialgebraisch?

c) Ist X zusammenhängend?

d) Ist X lokal zusammenhängend?

Abgabe bis zum Dienstag, dem 28. April 2015, um 15.30 Uhr