Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

17. März 2015

5. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
Schreiben Sie das Polynom $X^3 + Y^3 + Z^3$ als Polynom in den elementarsymmetrischen Funktionen in X, Y und Z !

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Die *Diskriminante* eines Polynoms n-ten Grades mit (nicht notwendigerweise verschiedenen) Nullstellen $z_1, \dots, z_n$ ist

$$\Delta = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^2 .$$

Berechnen Sie Δ für ein Polynom vom Grad zwei anhand einer Lösungsformel für quadratische Gleichungen!

b) Bestimmen Sie die Diskriminante des kubischen Polynoms $X^3 + pX + q$!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Mit welcher der Mengen $\mathcal{T}_i$ wird $\mathbb{R}^n$ ein topologischer Raum?

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\}, \quad \mathcal{T}_2 = \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \ \textit{(die Potenzmenge von } \mathbb{R}^n\textit{)}$$

$$\mathcal{T}_3 = \left\{ U \subset \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{zu jedem } x \in U \text{ gibt es ein } \varepsilon > 0, \text{ so} \\ \text{daß alle } y \text{ mit } \|x - y\| < \varepsilon \text{ in } U \text{ liegen} \end{array} \right\}, \quad \mathcal{T}_4 = \{U \subset \mathbb{R}^n \mid \mathbb{R}^n \setminus U \in \mathcal{T}_3\}$$

$$\mathcal{T}_5 = \{U \subseteq \mathbb{R}^n \mid U \text{ ist endlich}\}, \quad \mathcal{T}_6 = \{U \subseteq \mathbb{R}^n \mid \mathbb{R}^n \setminus U \text{ ist endlich}\}$$

b) Welcher dieser Räume ist kompakt?

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die Parabel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist!

b) Finden Sie eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$, die homöomorph zur Hyperbel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ ist!

c) Ist die Abbildung, die der Äquivalenzklasse des Punktes (z_1, z_2) im symmetrischen Produkt $\mathbb{C}^{(2)}$ den Punkt $(z_1^2 + z_2^2, z_1 z_2) \in \mathbb{C}^2$ zuordnet, ein Homöomorphismus?

Abgabe bis zum Dienstag, dem 24. März 2015, um 15.30 Uhr