WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

10. März 2015

4. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

Aufgabe 1: *(3 Punkte)*
Es gibt ein Polynom $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{26}]$ mit der Eigenschaft, daß $p \in \mathbb{N}$ genau dann eine Primzahl ist, wenn die Gleichung $f(x_1, \dots, x_{25}, p) = 0$ eine Lösung in $\mathbb{N}_0^{25}$ hat. Zeigen Sie, daß es auch ein Polynom $g \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{26}]$ gibt, dessen positive Werte an Stellen $(x_1, \dots, x_{26}) \in \mathbb{N}_0^{25}$ genau die Primzahlen sind!

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
a) Zeigen Sie, daß das Polynom $x^3 + x + 1$ genau eine reelle Nullstelle x_0 hat!
b) Finden Sie ein Polynom, das $x_0 + \sqrt{5}$ und $x_0 - \sqrt{5}$ als seine einzigen reellen Nullstellen hat!
c) Finden Sie ein Intervall, in dem dieses Polynom nur $x_0 + \sqrt{5}$ als Nullstelle hat!

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*
Versuchen Sie, mit Hilfe des Satzes von VIÈTE die Nullstellen der folgenden Polynome zu finden:
a) $f = X^5 - 2X^4 - 11X^3 + 40X^2 - 44X + 16$
b) $g = X^5 + 2X^4 - 4X^3 - 8X^2 + 3X + 6$

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*
a) Zeigen Sie: Ist $\sqrt{3}$ Nullstelle eines Polynoms $f \in \mathbb{Q}[X]$, so auch $-\sqrt{3}$.
b) Zeigen Sie: Ist $u + v\sqrt{3}$ mit $u, v \in \mathbb{Z}$ Nullstelle eines Polynoms $f \in \mathbb{Q}[X]$, so ist auch $f\big(u - v\sqrt{3}\big) = 0$.
c) Zeigen Sie, daß $u + v\sqrt{3}$ und $u - v\sqrt{3}$ die gleiche Vielfachheit haben!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 17. März 2015, um 15.30 Uhr