

17. Februar 2015

1. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

Aufgabe 1: (5 Punkte)

- a) Zeigen Sie durch Betrachtung der Ableitung, daß die Abbildung

$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{a + bx}{1 + x} \end{cases}$$

für zwei reelle Zahlen $a < b$ die positiven reellen Zahlen bijektiv abbildet auf das offene Intervall (a, b) !

- b) Zeigen Sie dies auch ohne Benutzung der Ableitung!
c) Was ist das Bild von φ ?
d) Zeigen Sie: Für ein Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad d ist auch $g(x) = (1 + x)^d f(\varphi(x))$ ein Polynom. Was können Sie über den Grad von g sagen?

Aufgabe 2: (8 Punkte)

- a) Zeigen Sie, nur mit Hilfe der Regel von DESCARTES, daß das Polynom

$$f = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x - 1$$

in der Menge aller reeller Zahlen größer eins entweder eine oder drei Nullstellen hat!

- b) Ermitteln Sie mit dem Satz von FOURIER-BUDAN die Nullstellenanzahl von f im Intervall $[0, 1]$!
c) Was sagt der Satz von FOURIER-BUDAN über die Nullstellen in der Menge aller reeller Zahlen größer eins?

Aufgabe 3: (7 Punkte)

- a) Was sagt Ihnen die Regel von DESCARTES über die positiven und die negativen Nullstellen des Polynoms $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 2$?
b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Tricks von JACOBI die Nullstellenanzahl von f im Intervall $(1, 2)$!
c) Was wissen Sie jetzt über die Anzahlen der positiven und negativen Nullstellen von f ?
d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Regel von BUDAN-FOURIER die Intervalle $(n, n + 1)$ mit $n \in \mathbb{Z}$, in denen f eine Nullstelle hat!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 24. Februar 2015, um 15.30 Uhr