Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

25. Mai 2012

13. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) $a_0, a_1, \dots, a_n$ seien positive reelle Zahlen. Zeigen Sie, daß das Polynom

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x - a_0$$

genau eine positive Nullstelle hat!

b) Zeigen Sie, daß die Funktion, die dem Tupel $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_{>0}^{n+1} \to \mathbb{R}$ diese Nullstelle zuordnet, semialgebraisch ist!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

Finden Sie Intervalle der Länge eins mit ganzzahligen Grenzen derart, daß jedes dieser Intervalle genau eine Nullstelle des Polynoms

$$f = x^4 - x^3 - 5x^2 + x + 2$$

enthält und jede reelle Nullstelle von f in einem dieser Intervalle liegt!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das Polynom $x^3 + x^2 - x + a \in \mathbb{R}[x]$ eine zweifache Nullstelle?

b) Bestimmen Sie diese zweifache Nullstelle!

c) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat $x^3 + x^2 + bx + a \in \mathbb{R}[x]$ eine dreifache Nullstelle?

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Drücken Sie den Satz, daß jedes Dreieck einen Umkreis hat, im Formalismus von Tarskis Axiomensystem aus!

b) Definieren Sie die Menge aller Punkte $M \in \mathbb{R}^2$, für die ein Kreis um M Inkreis des Dreiecks mit Ecken $A = (0,0)$, $B = (0,b)$ und $C = (c,d)$ ist, als semialgebraische Menge! Die Koordinaten von M sollen dazu *nicht* berechnet werden.

Abgabe bis zum Freitag, dem 1. Juni 2012, um 12.00 Uhr