Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

18. Mai 2012

12. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

Aufgabe 1: *(10 Punkte)*
Wir betrachten die semialgebraische Menge

$$X = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x\big((x-1)^2 + y^2 - 1\big) = 0\big\}$$

und die Zerlegung $\mathcal{Z} = \{A_1, \dots, A_{11}\}$ mit

$$\mathcal{A}_1 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\big\}, \quad \mathcal{A}_2 = \{0\} \times \mathbb{R},$$
$$\mathcal{A}_3 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 2 \wedge y < -\sqrt{1-(x-1)^2}\big\},$$
$$\mathcal{A}_4 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 2 \wedge y = -\sqrt{1-(x-1)^2}\big\},$$
$$\mathcal{A}_5 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 2 \wedge |y| < \sqrt{1-(x-1)^2}\big\},$$
$$\mathcal{A}_6 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 2 \wedge y = \sqrt{1-(x-1)^2}\big\},$$
$$\mathcal{A}_7 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 2 \wedge y > \sqrt{1-(x-1)^2}\big\}, \quad \mathcal{A}_8 = \{2\} \times \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\},$$
$$\mathcal{A}_9 = \big\{(2,0)\big\}, \quad \mathcal{A}_{10} = \{2\} \times \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}, \quad \mathcal{A}_{11} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x > 2\big\}$$

a) Skizzieren Sie X!

b) Zeigen Sie, daß diese Zerlegung zwar den Bedingungen des ersten Struktursatzes genügt, nicht aber denen des zweiten für das Polynom $x\big((x-1)^2 + y^2 - 1\big)$.

c) Verfeinern Sie diese Zerlegung so, daß auch dessen Bedingungen erfüllt sind!
Hinweis: Auch hier ist die im Beweis des Satzes konstruierte Zerlegung nicht unbedingt die einfachste!

Aufgabe 2: *(10 Punkte)*

a) Gegeben sei eine stratifizierende Zerlegung des $\mathbb{R}^n$, und $G \subset \mathbb{R}^n$ sei eine graphenförmige Menge über $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Zeigen Sie: Falls das Stratum S im Abschluß von G liegt, ist auch S eine graphenförmige Menge und liegt über einem $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$, das im Abschluß von A liegt.

b) Konkret sei $G = \big\{(x,y) \in A \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\big\}$ und $S = \big\{(x,y) \in B \times \mathbb{R} \mid y = g(x)\big\}$. Zeigen Sie, daß sich f dann fortsetzen läßt zu einer stetigen Funktion auf $\overline{A}$, die auf B mit g übereinstimmt!

Abgabe bis zum Freitag, dem 25. Mai 2012, um 12.00 Uhr