Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

4. Mai 2012

10. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ seien semialgebraische Mengen. Zeigen Sie:

a) Eine Abbildung $f: X \to Y$ ist genau dann semialgebraisch, wenn für jede semialgebraische Abbildung $g: Y \to \mathbb{R}$ die Hintereinanderausführung $g \circ f: X \to \mathbb{R}$ semialgebraisch ist.

b) f ist sogar bereits dann semialgebraisch, wenn die Hintereinanderausführungen $p_i \circ f$ mit den Koordinatenprojektionen $p_i: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ semialgebraisch sind.

c) $\mathcal{S}(X)$ und $\mathcal{S}(Y)$ seien die Ringe der semialgebraischen Funktionen $X \to \mathbb{R}$ *bzw.* $Y \to \mathbb{R}$ *(siehe voriges Übungsblatt).* Dann definiert jede semialgebraische Abbildung $f: X \to Y$ einen Ringhomomorphismus $f^*: \mathcal{S}(Y) \to \mathcal{S}(X)$.

d) Sind $A \subseteq Y$ und $f: X \to Y$ semialgebraisch, so auch $f^{-1}(A) \subseteq X$.

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

X sei eine semialgebraische Menge und $f, g: X \to \mathbb{R}$ seien semialgebraische Abbildungen. Zeigen Sie, daß dann auch $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ semialgebraische Abbildungen von X nach $\mathbb{R}$ sind!

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

Die Polynome $f = x^5y^3 - 3x^5y^2 + 3x^5y - x^5$ und

$$\begin{aligned} g = {} & x^4y^4 - 16x^4y^3 - 12x^3y^4 + 86x^4y^2 + 192x^3y^3 + 44x^2y^4 \\ & - 176x^4y - 1032x^3y^2 - 704x^2y^3 - 48xy^4 + 105x^4 + 2112x^3y + 3784x^2y^2 + 768xy^3 \\ & - 1260x^3 - 7744x^2y - 4128xy^2 + 4620x^2 + 8448xy - 5040x \end{aligned}$$

haben den ggT $xy - x$. (Das soll *nicht* nachgerechnet werden!)

a) Zeigen Sie, daß für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x_0.y_0) = 0$ auch $g(x_0, y_0)$ verschwindet!

b) Finden Sie den kleinsten Exponenten n derart, daß f ein Teiler von g^n ist!

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

Nach einem Satz aus der Elementargeometrie schneiden sich die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks in einem Punkt. (Eine Seitenhalbierende ist eine Gerade durch eine der Ecken und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite.) Zeigen Sie: Dieser Satz ist äquivalent dazu, daß eine gewisse semialgebraische Menge nicht leer ist.

Abgabe bis zum Freitag, dem 11. Mai 2012, um 12.00 Uhr