WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

27. April 2012

9. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*

a) $f: X \to Y$ sei eine bijektive semialgebraische Abbildung von $X \subseteq \mathbb{R}^n$ auf $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, daß dann auch die Umkehrabbildung $f^{-1}: Y \to X$ semialgebraisch ist.

b) Zeigen Sie: Sind $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ semialgebraische Abbildungen zwischen den semialgebraischen Mengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ und $Z \subseteq \mathbb{R}^p$, so ist auch die Hintereinanderausführung $g \circ f: X \to Z$ semialgebraisch.
Hinweis: Wenden Sie den Satz von TARSKI-SEIDENBERG *an auf eine geeignete Teilmenge von* $X \times Y \times Z$ *!*

Aufgabe 2: *(7 Punkte)*

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ sei eine semialgebraische Menge. Zeigen Sie:

a) Sind $f, g: X \to \mathbb{R}$ semialgebraische Abbildungen, so auch $f + g$ und $f \cdot g$.

b) Mit dieser Addition und Multiplikation wird die Menge aller semialgebraischer Funktionen $X \to \mathbb{R}$ zu einem Ring.

c) Die Einheiten dieses Rings sind genau die Funktionen $f: X \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in X$.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ sei eine semialgebraische Menge und $\mathcal{I} = \{A_1, \dots, A_r\}$ sei eine Zerlegung von $\mathbb{R}^n$ gemäß erstem Struktursatz derart, daß X die Vereinigung gewisser Mengen $A_k \in \mathcal{I}$ ist. Wir nennen zwei Mengen A_k, A_ℓ *benachbart,* wenn eine der beiden nichtleeren Durchschnitt mit dem Abschluß der anderen hat. Zeigen Sie: X ist genau dann (weg-)zusammenhängend, wenn es zu je zwei Mengen $A_k, A_\ell \subseteq X$ eine Folge von Indizes $k_0 = k, k_1, \dots, k_m = \ell$ gibt, so daß A_{k_i} und $A_{k_{i+1}}$ fur jedes $i = 0, \dots, m-1$ benachbart sind!

Abgabe bis zum Freitag, dem 4. Mai 2012, um 12.00 Uhr