Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

30. März 2012

7. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Geben Sie die Mengen $M_2^2(\mathbb{R})$ und $M_1^2(\mathbb{R})$ explizit an!

b) Bestimmen Sie jeweils die Teilmengen, auf denen es reelle Lösungen gibt, sowie die Funktionen, die diese angeben!

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

a) Geben Sie M_1^n explizit an!

b) Beschreiben Sie M_n^n durch Polynomgleichungen und -ungleichungen!

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

Eine algebraische Varietät über einem Körper k ist eine Menge der Form

$$V = \left\{ x \in k^n \;\middle|\; f_1(x) = \cdots = f_r(x) = 0 \right\}$$

für eine endliche Anzahl von Polynomen $f_1, \ldots, f_r \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Zeigen Sie:

a) Die Vereinigung zweier algebraischer Varietäten ist wieder eine algebraische Varietät.

b) Der Durchschnitt zweier algebraischer Varietäten ist wieder eine algebraische Varietät.

c) Für jeden Körper k gibt es Varietäten $V \subset k^n$ derart, daß

$$W = \{(x_1, \ldots, x_{n-1} \in k^{n-1} \;\middle|\; \exists x_n \in k \colon (x_1, \ldots, x_n) \in V \right\}$$

keine Varietät ist.

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{R}[x, y, z]$, dessen Nullstellen genau die Schnittpunkte der drei Kugeln um $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ mit Radius zwei sind!

Abgabe bis zum Freitag, dem 20. April 2012, um 12.00 Uhr