WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

16. März 2012

5. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie die Nullstellenmengen der folgenden Polynome mit Hilfe des Satzes von VIÈTE:

a) $f(x) = x^6 + 12x^5 + 27x^4 - 60x^3 - 156x^2 + 48x + 128$

b) $g(x) = x^6 + 2x^5 - 24x^4 + 14x^3 + 67x^2 - 96x + 36$

Das Einsetzen möglicher Kandidaten in die Polynome sollte dabei möglichst einem Computer überlassen werden.

Aufgabe 2: *(9 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß das Polynom $x^2 - 2 \in \mathbb{Z}[x]$ irreduzibel ist!

b) Zeigen Sie, daß jedes Polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ mit $f(\sqrt{2}) = 0$ in $\mathbb{Z}[x]$ durch $x^2 - 2$ teilbar ist!
Hinweis: Betrachten Sie den ggT von f und $x^2 - 2$!

c) Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome $f \in \mathbb{Z}[x]$ mit $f(\sqrt{2}) = 0$!

d) Zeigen Sie: Jedes Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$, das an der Stelle $x = \sqrt{2}$ verschwindet, verschwindet auch an der Stelle $x = -\sqrt{2}$. Gilt dies auch für Polynome aus $\mathbb{R}[x]$?

e) Ein Polynom zehnten Grades aus $\mathbb{Z}[x]$ verschwinde an den Stellen $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ sowie für $x = 1 + \sqrt{2}$. Bestimmen Sie die zehnte Nullstelle des Polynoms!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Schreiben Sie das Polynom $x^3 + y^3 + z^3$ als Polynom in den elementarsymmetrischen Funktionen in x, y und z!

Aufgabe 4: *(2 Punkte)*
Die *Diskriminante* eines Polynoms n-ten Grades mit (nicht notwendigerweise verschiedenen) Nullstellen $z_1, \ldots, z_n$ ist

$$\Delta = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^2 .$$

Berechnen Sie Δ für ein Polynom vom Grad zwei anhand der Lösungsformel für quadratische Gleichungen!

Abgabe bis zum Freitag, dem 23. März 2012, um 12.00 Uhr