Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

2. März 2012

3. Übungsblatt Reell-algebraische Geometrie

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
Finden Sie ein Intervall (a, b), das alle reellen Nullstellen des Polynoms

$$f(x) = x^{10} - 8x^9 + 9x^8 + 7x^6 + x^5 - 8x^3 - 9x^2 + 3x + 1$$

enthält!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
R sei ein Integritätsbereich.

a) Zeigen sind: Sind f und g zwei irreduzible Elemente von R, so existiert in R ein größter gemeinsamer Teiler von f und g. Dieser ist genau dann Eins, wenn f und g nicht assoziiert sind.

b) Auf R^2 sei eine Addition sowie eine Multiplikation definiert durch

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{und} \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)\,.$$

Zeigen Sie, daß R^2 dadurch zum Ring wird!

c) Ist R^2 ein Integritätsbereich?

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie den ggT von 2012 und 5533, und stellen Sie ihn als Linearkombination dieser beiden Zahlen dar!

b) Berechnen Sie in $\mathbb{Q}[x]$ den ggT der beiden Polynome

$$f(x) = x^5 + 4x^3 - 9x^2 - 2x^4 - 7x - 1 \quad \text{und} \quad g(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - 3x - 1\,!$$

c) Zeigen Sie, daß als Lösung auch ein Polynom aus $\mathbb{Z}[x]$ gewählt werden kann, und schreiben Sie dieses als Linearkombination von f und g!

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß jedes nichtkonstante lineare Polynom $f = ax+by+c$ aus $\mathbb{R}[x, y]$ irreduzibel ist!

b) Was ist $\mathrm{ggT}(x, y)$?

c) Ist $\mathbb{R}[x, y]$ ein Euklidischer Ring?

Abgabe bis zum Freitag, dem 9. März 2012, um 12.00 Uhr