Zur Mathematik des Jonglierens

Projektpraktikum Simulation Frühjahrssemester 2008

WOLFGANG K. SEILER

1. Wurf eines Objekts

Dieser Paragraph hält sich im wesentlichen an die Arbeit

[1] BENGT MAGNUSSON, BRUCE TIEMANN: The Physics of Juggling, *The Physics Teacher,* November 1989, S. 584–588

Wir betrachten zunächst nur den Wurf eines einzigen Objekts. Dabei wollen wir uns nicht darauf festlegen, um welche Art von Objekt es sich handelt; wir wollen lediglich davon ausgehen, daß folgende Annahmen erfüllt sind:

1. Wir können den Luftwiderstand vernachlässigen; Jonglieren mit Tüchern, so eindrucksvoll es auch aussehen kann, ist also ausgeschlossen.
2. Wir können die Gesetze der Punktmechanik anwenden. Das ist keine wirkliche Einschränkung, führt aber dazu, daß wir beispielsweise beim Jonglieren mit Keulen nur Aussagen über die Bewegung des Schwerpunkts machen, nicht aber über die Bewegung der Keule *um ihren Schwerpunkt,* obwohl gerade diese den besonderen Reiz des Jonglierens mit Keulen ausmacht.
3. Wir können sowohl die Gravitationskraft als auch die Masse der jonglierten Objekte als konstant annehmen. Das ist die harmloseste Annahme; sie bedeutet lediglich, daß unser Roboter seine Bälle oder was auch immer nicht bis in die Stratosphäre schleudert und daß er auch nicht im Weltraum auf einem kleinen Asteroiden jongliert; außerdem dürfen die Bälle nicht durch einen Raketen- oder sonstigen Antrieb beschleunigt werden, dessen Treibstoffverbrauch die Masse reduziert, und es darf auch nicht so stark schneien, daß der auf den Ball fallende Schnee dessen Masse während eines Wurfs nennenswert verändert.

Das Koordinatensystem sei so orientiert wie wir es von OpenGL mit der `glut`-Bibliothek gewohnt sind: die Kamera schaut in z-Richtung auf das Geschehen, die y-Koordinate beschreibt die Höhe, und die x-Koordinate ergänzt das Ganze zu einem kartesischen Koordinatensystem.

Wir wählen den Ursprung des Koordinatensystems und den der Zeitachse so, daß der Abwurf zum Zeitpunkt $t = 0$ auf Höhe $y = 0$ erfolgt; gefangen werde der Ball wieder auf derselben Höhe $y = 0$ – was bei gutem Jonglieren zumindest für die Grundfiguren ungefähr der Fall ist. (Auftritte echter Artisten leben natürlich von Variationen, bei denen insbesondere auch die Abwurf- und Fanghöhen unregelmäßig wechseln und gelegentlich ein Ball auch unter den Oberschenkel oder hinterm Rücken geworfen wird, denn eine längere Vorführung wird ohne solche „Gaukeleien“ schnell uninteressant. Da wir es aber in nur einem Semester garantiert nicht schaffen, einen Roboter zu simulieren, der eine Konkurrenz zu echten Artisten ist, müssen wir das nicht unbedingt nachmachen.)

Die meisten Jongleure sind bemüht, den Ball in einer Ebene mit konstanter z-Koordinate zu halten; wir wollen die z-Koordinate daher vernachlässigen und nur die Zeitabhängigkeit von y- und x-Koordinate betrachten. Über die x-Koordinate sei nichts weiter vorausgesetzt, schon weil die beiden Hände beim Jonglieren verschiedene x-Koordinaten haben. Die x-Koordinate des Abwurfpunkts sei daher einfach irgendeine reelle Zahl x_0.

Beides ist bestimmt durch die Abwurfgeschwindigkeit; diese sei gegeben durch den Vektor $\vec{v}_0 = \binom{u_0}{w_0}$. Nach dem ersten NEWTONschen Gesetz hat der Ball das Bestreben, diese Geschwindigkeit beizubehalten; da die x-Komponente keinen sonstigen Einflüssen unterworfen ist (wir vernachlässigen schließlich die Luftreibung), bleibt v_x somit während des gesamten Flugs konstant.

Die Geschwindigkeit in y-Richtung dagegen ist noch zusätzlich der Erdbeschleunigung $g \approx 9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$ unterworfen; sie ist daher zum Zeitpunkt t während des Flugs

$$v_y(t) = w_0 - gt, \quad \text{d.h.} \quad y(t) = \int_0^t v_y(\tau)\,d\tau = w_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Die maximale Flughöhe ist erreicht, wenn die y-Komponente der Geschwindigkeit auf null abgebremst ist, also zur Zeit

$$t_0 = \frac{w_0}{g}.$$

Danach fällt das Objekt und wird aufgefangen, sobald es wieder die Höhe null erreicht hat. Den Zeitpunkt, zu dem dies eintritt, bezeichnen wir mit $t = F$, denn da der Ball zum Zeitpunkt $t = 0$ abgeworfen wurde, ist das gerade die Flugzeit, die das Objekt zwischen Abwurf und Auffangen in der Luft verbringt.

Da bei Fangen wieder $y = 0$ ist, ist $y(F) = 0$, also

$$F = \frac{2w_0}{g} = 2t_0.$$

Die maximale Flughöhe ist somit

$$h = y(t_0) = w_0 t_0 - \frac{gt_0^2}{2} = \frac{w_0^2}{g} - \frac{gw_0^2}{g^2} = \frac{w_0^2}{2g} = \frac{1}{8}gF^2.$$

Diese Gleichungen können wir auch nach w_0 oder F auflösen; wir erhalten

$$h = \frac{w_0^2}{2g} \Longrightarrow w_0 = \sqrt{2gh} \quad \text{und} \quad h = \frac{1}{8}gF^2 \Longrightarrow F = \sqrt{\frac{8h}{g}}.$$

Man beachte, daß die Flugzeit nur mit der Wurzel der Flughöhe ansteigt; wie wir noch sehen werden, führt dies zu einem starken Anstieg der Flughöhe bei einer wachsender Anzahl zu jonglierender Objekte.

Damit kennen wir die Zeitabhängigkeit der y-Koordinate; die der x-Koordinate ist noch einfacher: Da in x-Richtung keine Kraft wirkt, ist die Geschwindigkeit in x-Richtung nach dem ersten NEWTONschen Gesetz konstant, d.h.

$$v_x(t) = u_0 \quad \text{und} \quad x(t) = x_0 + \int_0^x u_0 \, d\xi = x_0 + u_0 t \quad \text{mit} \quad x(0) = x_0.$$

Dies können wir auch als

$$t = \frac{x(t) - x_0}{u_0}$$

nach t auflösen und in die Formel für $y(t)$ ensetzen; wir erhalten die erwartete Wurfparabel mit Gleichung

$$y(t) = \big(x(t) - x_0\big)\frac{w_0}{u_0} - \frac{g}{2}\left(\frac{x(t) - x_0}{u_0}\right)^2.$$

Die Breite der Wurfparabel ist $s = u_0 F$; um sie mit der Wurfhöhe h in Verbindung zu bringen, beachten wir, daß

$$\frac{w_0}{u_0} = \tan\alpha$$

die Steigung der Wurfparabel im Abwurfpunkt ist, also der Tangens des Abwurfwinkels α. Wenn wir w_0 und F nach obigen Formeln durch die Wurfhöhe h ausdrücken, folgt

$$s = w_0 \tan\alpha \cdot F = \sqrt{gh}\tan\alpha \cdot \sqrt{\frac{8h}{g}} = 4h\tan\alpha.$$

Umgekehrt ist

$$\alpha = \arctan\frac{s}{4h}.$$

Typischerweise liegt s ungefähr bei 90 cm, ist also deutlich kleiner als $4h$, da h bei mehr als drei Objekten schnell im Bereich mehrerer Meter liegt. Deshalb machen wir keinen allzu großen Fehler, wenn wir die TAYLOR-Reihe des Arcustangens

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots$$

nach dem linearen Glied abbrechen. Einer Änderung der Wurfbreite um Δs entspricht daher ungefähr eine Änderung

$$\Delta\alpha \approx \frac{\Delta s}{4h}.$$

Da sich die Hand um Δs bewegen muß, um das Objekt zu fangen, kann Δs nicht beliebig groß werden; ein guter Jongleur kann ungefähr Δs bis zu einem Betrag von etwa 30 cm ausgleichen. Bei hoher Wurfhöhe h muß dazu der Winkel α sehr genau getroffen werden.

2. Die Shannonschen Sätze

Dieser Paragraph hält sich an

[**2**] CLAUDE E. SHANNON: Scientific Aspects of Juggling, *in: Collected Papers* (edited by N.J.A. SLOANE), S. 850–864, IEEE Press, 1993

SHANNON schrieb diese Arbeit um 1980, sie erschien aber erst rund zehn Jahre später in seinen gesammelten Werken.

SHANNON betrachtet nur den Fall der sogenannten gleichförmigen Jonglage; dies bedeutet, daß die folgenden drei Größen bei *jedem* Wurf den gleichen Wert haben:

D	*„dwell time“*	Zeit, die ein Objekt zwischen Fangen und Abwurf in einer Hand verbringt
F	*„flight time“*	Zeit, die ein Objekt zwischen Abwurf und Fangen in der Luft verbringt
V	*„vacant time“*	Zeit, in der eine Hand zwischen Abwurf und Fangen leer ist

Außerdem sei B die Anzahl der Bälle oer sonstigen Objekte, mit denen jongliert wird, und H die Anzahl der Hände. SHANNON verlangt nicht mehr, daß $H = 2$ ist; Fälle mit $H > 2$ sind vor allem interessant für Partner-Jonglage; andererseits kann man natürlich auch einem Roboter eine beliebige Anzahl von Armen geben.

Gleichförmiges Jonglieren zeichnet sich aus durch größtmögliche Periodizität; da alle Wurf- und Fangbewegungen einem einfachen Rhythmus gehorchen, lassen sich gleichförmige Jongliermuster einfacher lernen als ungleichförmige mit gleicher Anzahl von Bällen. SHANNON berichtet in seiner Arbeit, daß er „kürzlich“, also etwa um 1980, eine Konvention besuchte, wo etwa drei Viertel der rund hundert Artisten gleichförmig jonglierten. Inzwischen dürfte dieser Anteil etwas niedriger liegen, denn durch den weiteren Einfluß der Mathematik, mit dem wir uns in den nächsten Paragraphen beschäftigen werden, sind inzwischen auch kompliziertere Muster zunehmend populär geworden; trotzdem jongliert aber sicher noch immer deutlich mehr als jeder zweite Jongleur gleichförmig.

Nach [**1**] unterscheiden sich D und V bei fast allen Jongleuren nur um wenige Prozent; die Summe $D+V$ ist nach dieser Arbeit bei den meisten Jongleuren etwa einer halben Sekunde; beobachtet werden aber auch andere Werte zwischen 0,2 und 0,8 Sekunden.

SHANNON berichtet in [**2**], S. 861/2 von eigenen Messungen: Bei drei Objekten in einer Hand (insgesamt also fünf oder sechs) maß er $D = 0{,}25\,\text{sec}$ und $V = 0{,}17\,\text{sec}$. Beim Jonglieren mit drei Keulen, bei denen man im Gegensatz zu Bällen und Ringen auch noch Zeit braucht, um die Rotation zu stoppen und beim Abwurf neu zu starten, maß er $D = 0{,}52\,\text{sec}$, $V = 0{,}20\,\text{sec}$ und $F = 0{,}56\,\text{sec}$. Der Unterschied zwischen den Angaben aus [**1**] und [**2**] erklärt sich wohl dadurch, daß die meisten Jongleure mit drei oder vier Objekten jonglieren, während SHANNON in erster Linie an denen interessiert ist, die mit (zum Teil deutlich) mehr Objekte jonglieren.

Die SHANNONschen Sätze führen zu einer Klassifikation aller gleichförmiger Jongliermuster; wir formulieren zunächst alle drei Sätze und beweisen sie dann gemeinsam.

Erster Satz von Shannon: $\dfrac{F+D}{V+D} = \dfrac{B}{H}$

Zweiter Satz von Shannon: Falls B und H teilerfremd sind, gibt es (bis auf Umnummerieren der Objekte und Hände) nur ein gleichförmiges Jongliermuster. Jedes Objekt geht in einer zyklischen Folge durch die sämtlichen Hände, und jede Hand wirft in zyklischer Folge die sämtlichen Objekte.

Dritter Satz von Shannon: Ist $n = \mathrm{ggT}(B, H) > 1$, gibt es so viele Jongliermuster wie Partitionen von n.

Beweise: $D + F$ ist die Zeit zwischen zwei Abwürfen eines festen Balls, denn der Ball verbringt die Zeit F in der Luft und anschließend, vor dem nächsten Abwurf, die Zeit D in der fangenden Hand.

$D + V$ ist die Zeit zwischen Würfen aus einer festen Hand, denn nach dem Abwurf bleibt die Hand während er Zeit V leer und hält dann, vor dem nächsten Wurf, während der Zeit D den gefangenen Ball.

Mit dieser Interpretation erscheint der erste Shannonsche Satz fast selbstverständlich; da allerdings nicht jeder Ball in jede Hand kommen muß, müssen wir doch ein bißchen vorsicht sein.

Die Jonglage beginne zum Zeitpunkt $t = t_0$ mit dem Abwurf eines Objekts. Wir verfolgen dieses Objekt über eine Periode, die H Fänge enthält und mit einem Wurf endet, also über die Zeit $H(F + D)$. Da es nur H Hände gibt, aber $H + 1$ Hände in den ursprünglichen Abwurf und die H Fänge verwickelt sind, muß mindestens eine Hand das Objekt zweimal berührt haben (Dirichletsches Schubfachprinzip).

Wir wählen eine solche Hand aus; nachdem sie das Objekt abgeworfen hat, werde dieses a mal gefangen, beim a-ten Mal wieder von dieser Hand. Die Zeit zwischen den beiden Fängen durch diese Hand ist daher gleich $a(D+F)$. Während derselben Zeitspanne habe die betrachtete Hand b Objekte gefangen; dann ist

$$a(D + F) = b(D + V) \quad \text{oder} \quad \frac{D+F}{D+V} = \frac{b}{a} = \frac{p}{q},$$

wobei p/q die gekürzte Form des Bruchs a/b sei.

Wir betrachten nun die Menge M_0 aller Objekte, die zur Zeit $t = t_0$ abgeworfen werden. Wegen der Gleichförmigkeit der Jonglage werden diese Objekte alle zur gleichen Zeit gefangen und abgeworfen, wenn auch durch verschiedene Hände. Wir sagen, M_0 sei eine *synchrone* Menge.

Zur Zeit $t_k = t_0 + k(D+V)$ werfen dieselben Hände, die zum Zeipunkt t_0 die Objekte aus M_0 abgeworfen haben, Objekte aus einer weiteren synchronen Menge M_k. Für $k < p$ muß $M_k \cap M_0 = \emptyset$ sein, da $k(D + V)$ dann nicht durch $D + F$ teilbar ist. Zur Zeit

$$t_p = t_0 + p(D + V) = t_0 + q(D + F)$$

aber *muß* $M_p = M_0$ sein, denn da die Zeitspanne zwischen zwei Würfen für jedes Objekt gleich $D+F$ ist, wurden die Objekte aus M_p alle auch zur Zeit t_0 abgeworfen, d.h. $M_0 = M_p$. (Natürlich muß nicht jedes Objekt wieder in derselben Hand sein wie zur Zeit $t = t_0$; nur die *Mengen* der werfenden Hände sind gleich.)

Damit haben wir p Mengen $M_0, \ldots, M_{p-1}$ von Objekten, die alle im wesentlichen dem gleichen zyklischen Muster folgen; alle diese Mengen haben dieselbe Mächtigkeit m, so daß hiermit das Verhalten von pm Objekten geklärt ist.

Da Anzahl der Hände, die an diesem Zyklus beteiligt sind, ist qm, denn jedes der m Objekte aus M_0 wird während des Zyklus zu jeder der Zeiten $t_0 + \ell(D + F)$ mit $0 \leq \ell < q$ abgeworfen, wobei jeweils disjunkte Mengen von Händen aktiv sind.

Falls $pm < B$ noch nicht die Gesamtzahl der jonglierten Objekte ist, muß es weitere Objekte geben, die von bislang noch nicht betrachteten Händen geworfen werden. $t'_0 > t_0$ sei der erste Zeitpunkt nach t_0, zu dem *irgendeine* Hand ein Objekt wirft. Wegen der Gleichförmigkeit der Jonglage muß $t'_0 < t_1$ sein, und es gibt wieder eine Menge M'_0 von Objekten, die zu diesem Zeitpunkt geworfen werden und die zum Zeitpunkt

$$t'_p = t'_0 + p(D + V) = t'_0 + q(D + F)$$

zurück in derselben Menge von Händen sind. Entsprechend gibt es die Mengen M'_k der Objekte, die von diesen Händen zu den Zeiten $t'_k = t'_0 + k(D + V)$ abgeworfen werden. Alle diese Mengen haben dieselbe Mächtigkeit m'; insgesamt enthalten sie pm' Objekte; die Anzahl h' der am Zyklus beteiligten Hände ist wieder qm'.

Falls auch noch $p(m + m') < B$ ist, gibt es weitere Mengen $M''_0, \ldots, M''_{p-1}$, und so weiter, bis schließlich

$$p(m + m' + \cdots + m^{(k)}) = B \quad \text{und} \quad q(m + m' + \cdots m^{(k)}) = H$$

ist. p ist daher ein Teiler von B und q ein Teiler von H; wegen der Teilerfremdheit von p und q ist

$$n = m + m' + \cdots + m^{(k)} = \frac{B}{p} = \frac{H}{q}$$

der größte gemeinsame Teiler von B und H.

Damit sind alle drei Sätze bewiesen. ■

Shannon beweist noch ein Korollar zu seinem ersten Satz, in dem es um die Schnelligkeit des Jonglierens geht: Nach der Diskussion im ersten Paragraphen ist klar, daß es beim Jonglieren umso schneller gehen muß, je niedriger die Wurfhöhe ist. Aber auch bei konstanter Wurfhöhe sind noch Variationen möglich: Bezeichnen wir die Zeit $D + F$ zwischen zwei Abwürfen desselben Balls mit τ, so gilt:

Korollar: Bei fester Wurfhöhe ist das Verhältnis zwischen längstmöglichem und kürzestmöglichem τ gleich $\dfrac{B}{B - H}$.

Beweis: Nach Definition ist $\tau = F + D$, wobei

$$F = \sqrt{\frac{8h}{g}}$$

durch h (und die Erdbeschleunigung) festgelegt, also konstant ist. Der kleinstmögliche Wert ist somit $\tau_{\min} = F$; er tritt auf, wenn $D = 0$ ist, wenn also jeder Ball sofort nach dem Fangen gleich wieder abgeworfen wird. Der Ball wird dann nicht gefangen, sondern reflektiert. (Wie wir bald sehen werden, ist dies nicht unbedingt realistisch, da der Ball bei den meisten Mustern an einer anderen Position gefangen als geworfen werden muß, um Kollissionen in der Luft zu vermeiden. Es geht hier also um einen praktisch nicht erreichbaren Grenzfall.)

Der Maximalwert von τ wird genau dann angenommen, wenn auch D maximal ist. Nach dem ersten Satz von SHANNON ist

$$(F + D)H = (V + D)B \Longrightarrow FH - BV = (B - H)D \Longrightarrow D = \frac{FH - BV}{B - H},$$

also ist das genau dann der Fall, wenn V verschwindet, wenn also jede Hand sofort nach Abwurf eines Balls den nächsten fängt – auch dies ein praktisch nicht erreichbarer Grenzfall.

(Man beachte, daß beim Jonglieren definitionsgemäß $B > H$ ist; $B \leq H$ beschreibt Ballspiele, die für Kinder am Strand ganz nett sein können, für die ein echter Jongleur aber nur Verachtung übrig hat. Somit kann der Nenner in obiger Formel nie verschwinden.)

Das maximale D ist somit

$$D_{\max} = \frac{FH}{B - H} \quad \text{und} \quad \tau_{\max} = F + D_{\max} = \frac{FB}{B - H}.$$

Damit ist

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}} = \frac{B}{B - H},$$

wie behauptet. ■

Wie dieses Korollar zeigt, hat man beim Jonglieren mit vielen Bällen also deutlich weniger Variablität: Für zwei Hände und drei Bälle haben wir noch ein Geschwindigkeitsverhältnis von 3 : 1, bei fünf Bällen ist es nur noch 5 : 3 und bei neun Bällen gerade noch 9 : 7.

3. Jonglieren mit zwei Händen

In diesem Paragraphen und den beiden folgenden Paragraphen möchte ich die beiden klassischen gleichförmigen Jongliermuster aus den SHANNONschen Sätzen ableiten. Mathematisch gesehen ist das trivial; für genauere Angaben zur praktischen Realisierung dieser (und anderer) Jongliermuster sei auf Lehrbücher des Jonglierens verwiesen wie z.B.

[**3**] CHRISTOPH REHM: Jonglieren – Ein Übungsweg, *Urachhaus, ³1995*

oder

[**4**] DAVE FINNIGAN: Alles über die Kunst des Jonglieren, *DuMont, 1988*

Wir interessieren uns in diesem Praktiukum natürlich hauptsächlich für den Fall $H = 2$; nach dem ersten Satz von SHANNON ist dann

$$\frac{D+F}{D+V} = \frac{B}{H} = \frac{B}{2}.$$

Falls man den Angaben aus [**1**] entsprechend $D = V$ setzt, vereinfacht sich dies zu

$$\frac{D+F}{2D} = \frac{B}{2} \quad \text{oder} \quad F = (B-1)D.$$

Nach den Formeln aus Paragraph eins wächst die Wurfhöhe

$$h = \frac{1}{8}gF^2 = \frac{1}{8}gD^2(B-1)^2$$

dann quadratisch mit der Anzahl der Bälle, wird also sehr schnell sehr hoch.

Die Angaben aus [**1**] beziehen sich allerdings auf das, was die *meisten* Jongleure tun, und die meisten Jongleure arbeiten mit höchstens fünf bis sechs Bällen; viele beschränken sich sogar ausschließlich auf das Jonglieren mit drei Bällen – dann aber natürlich nicht auf gleichförmiges Jonglieren.

Beim Jonglieren mit vielen Bällen kann man die notwendige Wurfhöhe reduzieren, indem man V kleiner als D macht; mit $V = \alpha D$ ergibt sich

$$\frac{D+F}{(1+\alpha)D} = \frac{B}{2} \Longrightarrow F = \frac{(1+\alpha B)-2}{2}D,$$

was im (nicht realisierbaren) Grenzfall $\alpha = 0$ zu

$$F = \left(\frac{B}{2}-1\right)D \quad \text{und} \quad h = \frac{1}{8}gD^2\left(\frac{B}{2}-1\right)^2$$

führt. Asymptotisch entspricht dies einer Reduktion der Flughöhe um den Faktor vier.

Nach dem dritten Satz von SHANNON gibt es bei zwei Händen für ungerades B genau ein Jongliermuster, da B und H dann teilerfremd sind. Für gerade Ballanzahl B ist $\mathrm{ggT}(B, H) = 2$; es gibt also zwei Muster, die den Partitionen $2 = 2$ und $2 = 1 + 1$ entsprechen.

4. Kaskaden

Beginnen wir mit dem ungeraden Fall. Nach dem ersten Satz von SHANNON ist

$$\frac{D+F}{D+V} = \frac{B}{H} = \frac{B}{2},$$

wobei rechts *keine* ganze Zahl steht.

Falls die rechte Hand zur Zeit $t = t_R$ einen Ball wirft, wirft sie die weiteren Bälle zu den Zeiten $t_R + k(D + V)$ mit $k \in \mathbb{N}$; entsprechend wirft die linke Hand zu Zeiten $t_L + k(D + V)$ mit einem gewissen Anfangszeitpunkt t_L und $k \in \mathbb{N}$.

Falls ein Ball zur Zeit $t = t_0$ von einer der beiden Hände abgeworfen ist, muß er von der anderen Hand aufgefange werden, denn der nächste Abwurf zur Zeit $t = t_0 + (D + F)$ kann nicht in der Form $t_0 + k(D + V)$ geschrieben werden.

Nach dem Abwurf durch die andere Hand muß er aus demselben Grund zur Zeit $t_0 + 2(D + F)$ in die ursprüngliche Hand zurückkehren; da

$$B(D + V) = 2(D + F)$$

ist, sind durch diese Hand zwischenzeitlich auch alle anderen Bälle gegangen.

Damit ist der Rythmus klar: Man kann die Bälle so nummerieren, daß die rechte jeweils zum Zeitpunkt $t_R + k(D + V)$ den k mod B-ten Ball wirft; die linke Hand wirft diesen Ball zu den Zeitpunkten

$$t_L + k(D + V) = t_R + (D + F) + k(D + V) = t_R + \left(k + \frac{B}{2}\right)(D + V).$$

Dieses Jongliermuster bezeichnet man als *Kaskade;* die Dreiballkaskade ist üblicherweise das erste Muster, das ein Jongleur lernt, und die Kaskade ist auch die Grundform, zu der ein Könner nach schwierigeren Zwischeneinlagen beim Jonglieren mit einer ungeraden Anzahl von Objekten immer wieder zurückkehrt.

Der Rekord bei Kaskaden mit Bällen (*bzw.* Beanbags) liegt bei elf (BRUCE SAFARIN 2001 mit 15 Fängen); bei den einfacher beherrschbaren (aber schwieriger zu simulierenden) Ringen liegt der Rekord sogar bei 13 (ALBERT LUCAS 2002 mit 13 Fängen). Keulen sind deutlich schwerer handhabbar; hier liegt der Rekord nur bei neun (BRUCE TIEMANN 1996, SCOTT SORENSEN 1997 und CHRIS FOWLER 2003 mit jeweils neun Fängen).

Alle diese und eventuelle neue Rekorde können nachgelesen werden unter `www.juggling.org/records/records.html` .

Andererseits sind selbst Dreiballkaskaden (mit Variationen) interessant genug; es gibt eine ganz Reihe von Jongleuren, die nichts anderes machen. SHANNON berichtet in [**2**] von einem Wettbewerb auf einem Jongleurtreffen 1980, bei dem der erste Preis an einen Kandidaten ging, dessen gesamtes Programm eine kaskadenförmige Jonglage mit drei Keulen war – gewürzt natürlich durch zahlreiche Variationen.

Nach den SHANNONschen Sätzen ist die Kaskade das *einzige* gleichförmige Jongliermuster für ungerade Ballanzahl; das bedeutet allerdings nicht, daß sie bereits eindeutig festgelegt sei: Da die Bälle oder sonstigen Objekte nicht in der Luft zusammenstoßen dürfen, können die Hände nicht immer in der gleichen x-Position bleiben, denn sonst würden sich alle Objekte auf derselben Parabel bewegen.

Notwendig sind daher mindestens zwei Parabeln, und somit muß für jede Hand die Abwurfposition verschieden von der Fangposition sein. Jede Hand wechselt somit ständig zwischen zwei Position, einer *distalen* (rumpffernen) und einer *proximalen* (rumpfnahen) Position. Der Abstand zwischen diesen Positionen liegt bei etwa 30 cm; da die beiden Parabeln auf jeden Fall Schnittpunkte haben, muß er so mit den Abwurfszeiten abgestimmt sein, daß sich in deren Umgebung nie zwei Bälle gleichzeitig aufhalten. Was „Umgebung" in diesem Zusammenhang bedeutet, hängt natürlich ab vom Durchmesser der Bälle.

Beim Jonglieren mit Ringen hat man es etwas einfacher, da man hier die Kollisionsfreiheit bereits durch eine minimale Verschiebung der Parabeln in z-Richtung erreichen kann; beim Jonglieren mit Keulen dagegen müssen die Sicherheitsabstände wegen deren Bewegung um den Schwerpunkt deutlich größer sein, was erklärt, warum Keulen schwerer beherrschbar sind als Bälle, und die wiederum schwerer als Keulen.

Meist wird aus der proximalen Position abgeworfen und in der distalen gefangen, aber natürlich ist auch das Umgekehrte möglich. Würfe von distal zu distal und proximal zu proximal allerdings verletzen die Bedingung der Gleichförmigkeit, denn dann bewegen sich die Bälle auf zwei verschieden großen Parabeln.

5. Fontänen

Ist B gerade, so ist

$$\frac{D+F}{D+V}=\frac{B}{2}$$

ganzzahlig, und wir haben nach dem dritten Satz von SHANNON zwei mögliche Jongliermuster. Beim ersten zur Partition $2=2$ werfen beide Hände jeweils gleichzeitig und fangen daher auch wieder gleichzeitig. Falls die geworfenen Bälle dabei die Hand wechseln würden, müßten sie wegen der Symmetrie der Wurfparabeln in der Luft kollidieren; daher muß jeder Ball zurück in die werfende Hand und wird von dieser $D+F$ Zeiteinheiten später wieder abgeworfen. Da

$$D+F=\frac{B}{2}(D+V)$$

ist, hat diese zwischenzeitlich $B/2-1$ andere Bälle abgeworfen; hier ist also jede Hand für die Hälfte der Bälle zuständig und wirft diese in Abständen von $D+V$ Zeiteinheiten ab. Dieses Muster bezeichnet man als *Fontäne,* genauer gesagt als den Spezialfall der Fontäne, bei der beide Hände jeweils gleichzeitig werfen. In dieser Form sind Fontänen nur selten zu sehen.

Die Partition $2=1+1$ entspricht einem Muster, bei dem die beiden Hände zu verschiedenen Zeiten werfen. Da $D+F$ ein ganzzahliges Vielfaches von $D+V$ ist, kann auch hier kein Ball von einer Hand in die andere geworfen werden, denn zum Zeitpunkt $D+F$ wirft nur die Hand, die den Ball auch beim vorigen Mal geworfen hat. Daher haben wir es auch hier mit Fontänen zu tun, allerdings sind die Würfe der linkten Hand gegenüber denen der rechten zeitlich verschoben. In der Praxis sieht man oft den Fall, daß die zweite Hand dann wirft, wenn ein von der ersten Hand geworfener Ball seine maximale Höhe erreicht hat. Dies ist, wie wir im ersten Abschnitt gesehen haben, jeweils zur Zeit $F/2$ nach Abwurf der Fall; die zweite Hand ist also um $F/2$ gegenüber der ersten verschoben.

Symmetrischer ist eine Verschiebung um $\frac{1}{2}(D+V)$; in diesem Fall wird jeweils zu Zeiten

$$t_k = \frac{k}{2}(D+V)$$

geworfen, wobei eine Hand für die geraden und die andere für die ungeraden Werte von k zuständig ist.

Bei Fontänen mit mehr als einem Ball pro Hand muß sich die Hand (im Gegensatz zum Fall der Kaskaden) auch in x-Richtung bewegen, denn bei einer festen x-Position müßten die Bälle senkrecht in die Höhe geworfen werden und würden in der Luft kollidieren.

Meistens werden die Bälle auch bei Fontänen in Parabeln geworfen, wobei allerdings die Basisbreite der Parabel nur etwa dreißig Zentimeter beträgt. Die Hand wechselt somit ständig zwischen zwei Positionen hin und her; aus der einen wird geworfen, in der anderen gefangen. Dabei kann entweder nach *außen* geworfen werden, oder (was menschliche Jongleure meist als schwerer empfinden) nach *innen:* Das eine Mal ist die Abwurfposition proximal (d.h. in Rumpfnähe) und die Fangposition distal (d.h. weg vom Rumpf), das andere Mal ist es umgekehrt. Auch können entweder beide Hände nach außen oder beide nach innen werfen, oder die eine nach außen und die andere nach innen, was zu parallelen Flugbahnen führt.

Zumindest bei vier Bällen, d.h. zwei Bällen pro Hand, ist noch eine weitere Variante von Fontänen zu beobachten: Hier werden die Bälle senkrecht in die Luft geworfen, der eine aus der proximalen, der andere aus der distalen Handposition. Die nach den SHANNONschen Sätzen möglichen Jongliermuster können also auf verschiedene Weisen realisiert werden.

Der große Jongleur ENRICO RASTELLI jonglierte einmal eine Zehnballfontäne mit zwanzig Fängen, was lange Zeit der Rekord war. 1996 schaffte dann BRUCE SARAFIAN eine Zwölfballfontäne mit zwölf Fängen, 2001 eine Zehnballfontäne mit 23 Fängen. 2006 wurf auch PETER BONE zwölf Bälle und kam ebenfalls auf zwölf Fänge.

Auch bei Ringen liegt der Fontänenrekord bei 12 (ANTHONY GATTO 1993 und ALBERT LUCAS 1996, jeweils zwölf Fänge); bei Keulen sind es acht (ANTHONY GATTO 1991 mit zwölf Fängen und 2006 mit sechzehn).

6. Der Shower

Kaskaden und Fontänen sind zwar sicherlich die am häufigsten zu beobachtenden Jongliermuster, schon weil sie die einfachsten sind, aber sie sind bei weitem nicht die einzigen: Eine ganze Reihe von Jongleuren leben davon, daß es selbst bei nur drei Bällen eine Unzahl von Variationen gibt.

Am bekanntesten ist der *Shower,* der mit einer beliebigen Anzahl von Bällen jongliert werden kann. Hier bewegen sich die Bälle topologisch gesehen auf einer Kreisbahn, alle im selben Umlaufsinn.

Realisiert wird dies dadurch, daß die eine Hand (bei Rechtshändern im allgemeinen die rechte) die Bälle in einer mehr oder weniger hohen Parabel zur zweiten wirft;

diese fängt sie und reicht sie dann entweder direkt oder durch einen niedrigen Wurf zurück an die erste Hand.

Wie die Formeln aus §1 zeigen, ist die Flugzeit für die hohe Parabel deutlich größer als für die niedrige; die Annahmen für gleichförmiges Jonglieren sind also nicht mehr erfüllt. Dies erklärt, warum er selbst bei nur drei Bällen einem Anfänger deutlich schwerer fällt als eine Kaskade: Der kompliziertere Rythmus braucht länger, bis die dazugehörigen Muskelbewegungen vom Kleinhirn gelernt sind und ohne Zutun des Großhirns gesteuert werden können.

Trotzdem ist auch der *Shower* eine periodische und damit rythmische Bewegung; im Gegensatz zu Kaskade und Fontaine verkürzt sich allerdings die Periode nicht, wenn man aufhört, zwischen den Bällen zu unterscheiden.

7. Mathematische Beschreibung ungleichförmiger Muster

Eine kompakte Beschreibung ungleichförmiger Muster ist nur möglich, wenn wir gewisse Annahmen machen, um die *a priori* unüberschaubare Vielfalt solcher Muster in ein mathematisches Korsett zu zwängen. Wir beschränken uns hier auf die Annahmen einer der am einfachsten verständlichen Arbeit auf diesem Gebiet, nämlich

[**5**] JOE BUHLER, DAVID EISENBUD, RON GRAHAM, COLON WRIGHT: Juggling Drops and Descents, *Am. Math. Monthly* **101** (1994), 507–519;

Verallgemeinerungen findet man z.B. in

[**6**] L. KAMSTRA: Juggling polynomials, *CWI Report PNA-R0113,*
`http://www.cwi.nl/ftp/CWIreports/PNA/PNA-R0113.`$\begin{cases}\texttt{pdf}\\ \texttt{ps.Z}\end{cases}$.

Das Buch

[**7**] BURKARD POLSTER: The Mathematics of Juggling, *Springer,* 2003

enthält ebenfalls eine Darstellung dieser Theorie sowie eine ganze Reihe von Erweiterungen.

Die Grundannahmen in [**5**] sind folgende:

1. Alle Abwurfszeiten liegen auf einer äquidistanten diskreten Zeitskale
2. Das Muster ist periodisch
3. Zu jedem Zeitpunkt wird höchstens ein Ball geworfen.
4. Jeder Ball wird tatsächlich irgendwann geworfen.

Diese Annahmen sind weitgehend unproblematisch: Bei den bisher betrachteten Mustern sind mit einer Ausnahme alle erfüllt, und die einzige Ausnahme, die 3. verletzenden synchronen Fontänen, werden kaum verwendet.

Ein Jongliermuster für n Bälle, das diese Bedingungen erfüllt, ist nach [**5**] gegeben durch n disjunkte Teilmengen M_i von $\mathbb{Z}$, die den Abwurfzeiten für die einzelnen Bälle entsprechen; bei der Dreiballkaskade etwa sind es die Mengen

$$M_1 = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}, \quad M_2 = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

und

$$M_3 = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}.$$

Man beachte, daß [**5**] nicht danach unterscheidet, von *welcher* Hand der Ball geworfen wird; Jongliermuster, die sich nur darin unterscheiden werden, unabhängig davon, wie viele Hände tatsächlich involviert sind, im Sinne von [**5**] als äquivalent betrachtet. Da wir uns in erster Linie für das Jonglieren mit zwei Händen interessieren, werden wir bei der graphischen Realisierung eines Musters meist davon ausgehen, daß die eine Hand für alle geraden und die andere für alle ungeraden Zeitpunkte zuständig ist.

Jongliermuster können deutlich kompakter charakterisiert werden als durch Angabe der Mengen M_i: Da nach Bedingung 3 zu jedem Zeitpunkt höchstens ein Ball geworfen wird und dieser Ball wegen der Periodizität des Musters (Bedingung 2) auch später immer wieder geworfen werden muß, ist die Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ t \mapsto \begin{cases} u & \text{falls der zur Zeit } t \text{ geworfene Ball das nächste Mal zur} \\ & \text{Zeit } u \text{ geworfen wird} \\ t & \text{falls zur Zeit } t \text{ kein Ball geworfen wird.} \end{cases} \end{cases}$$

wohldefiniert; für die Dreiballkaskade etwa ist einfach $f(t) = t + 3$.

Wegen Bedingung 3 ist die Abbildung f injektiv; sie ist auch surjektiv, denn wenn zu einem Zeitpunkt t_1 ein Ball abgeworfen wird, ist der Zeitpunkt t_0 seines vorigen Abwurfs ein Urbild, und wenn zur Zeit t_1 kein Ball geworfen wird, ist t_1 sein eigenes Urbild. Also ist $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ eine bijektive monoton steigende Abbildung.

Durch diese Abbildung ist das Jongliermuster eindeutig bestimmt: Ist nämlich M_i die Menge der Abwurfzeitpunkte für den i-ten Ball, so muß mit einer Zeit t auch deren Bild $f(t)$ in M_i liegen und natürlich auch ihr Urbild $f^{-1}(t)$.

Definition: $f\colon M \to M$ sei eine bijektive Abbildung der Menge M auf sich selbst. Unter der *Bahn* eines Elements $t \in M$ verstehen wir die kleinste Teilmenge $O \subseteq M$ mit der Eigenschaft, daß für jedes $\tau \in O$ auch $f(\tau)$ und $f^{-1}(\tau)$ in O liegen.

Anders ausgedrückt ist die Bahn von t also

$$O = \left\{ f^n(t) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0 \right\} \cup \left\{ \left(f^{-1}\right)^m(t) \;\middle|\; m \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ f^n(t) \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Falls zum Zeitpunkt t kein Ball geworfen wird, besteht die Bahn von t nur aus dem einen Zeitpunkt t; andernfalls ist $f(t) > t$ ein Zeitpunkt, zu dem derselbe Ball das nächste Mal geworfen wird und so weiter, d.h. die Bahn von t ist unendlich.

Damit entsprechen die unendlichen Bahnen von f genau den Bällen, und sie bestehen gerade aus den Abwurfzeiten eines festen Balls.

Definition: Ein Jongliermuster ist eine bijektive monoton ansteigende Funktion $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit periodischer *Höhenfunktion* $df\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $df(t) = f(t) - t$.

Offensichtlich ist die Funktion f durch ihre Höhenfunktion bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Da es beim Jonglieren irrelevant ist, wo der Nullpunkt der Zeitskala liegt, ist das Jongliermuster also auch durch df eindeutig bestimmt.

Der Name Höhenfunktion kommt daher, daß die Wurfhöhe nach §1 eineindeutig durch die Flugzeit bestimmt ist; bezeichnen wir, wie üblich, mit D die Zeit, die ein Ball nach dem Fangen in einer Hand verbringt, so ist die Flugzeit des zum Zeitpunkt t geworfenen Balls $F = df(t) - D$, die Wurfhöhe also

$$h = \frac{1}{8}gF^2 = \frac{1}{8}g\big(df(t) - D\big)^2.$$

Interpretiert man das Jongliermuster so, daß die eine Hand immer zu geraden, die andere immer zu ungeraden Zeiten wirft, ist der Abstand $D + V$ zwischen zwei Würfen aus derselben Hand gleich zwei Einheiten; falls wir also $D = V$ annehmen, ist $D = 1$ und

$$h = \frac{1}{8}g\big(df(t) - 1\big)^2.$$

Wie oben erwähnt, ist diese Annahme sinnvoll, falls keine zu große Anzahl von Bällen jongliert wird; bei mehr als fünf Bällen werden die Wurfhöhen zu groß.

Die Anzahl der Bälle läßt sich folgendermaßen direkt durch f ausdrücken:

Lemma: Die Anzahl der Bälle ist

$$\lim_{b-a\to\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{t=a}^{b} df(t).$$

Beweis: Da die Jongliermuster als periodisch vorausgesetzt sind, gibt es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$, so daß für jede der Mengen M_i gilt: $t \in M_i \iff t + m \in M_i$. Ist $b - a$ größer als die Periode, enthält das Intervall $[a, b]$ daher aus jeder unendlichen Bahn mindestens ein Element. Da $df(t)$ der Abstand zum nächsten Element aus derselben Bahn ist, liegt die Summe der $df(t)$ mit t aus dem Durchschnitt von $[a, b]$ mit der Bahn zwischen $b-a-2m$ und $b-a$. Sind $O_1, \ldots, O_r$ die verschiedenen unendlichen Bahnen und bezeichnet $s_j(a, b)$ die Summe der $df(t)$ mit t aus dem Durchschnitt von O_j mit dem Intervall $[a, b]$, o ist

$$\frac{1}{b-a} \sum_{t=a}^{b} df(t) = \frac{1}{b-a} \sum_{j=1}^{r} s_j(a, b),$$

denn falls t nicht in einer unendlichen Bahn liegt, ist $df(t) = 0$. Somit gilt

$$r \cdot \frac{b-a-2m}{b-a} \le \frac{1}{b-a} \sum_{t=a}^{b} df(t) = \frac{1}{b-a} \sum_{j=1}^{r} s_j(a, b) \le r \cdot \frac{b-a}{b-a}.$$

Da r gleich der Anzahl der Bälle ist, folgt für $b - a \to \infty$ die Behauptung. ∎

Für die oben eingeführte Zahl m ist

$$f(t + m) = f(t) + m$$

für alle $t \in \mathbb{Z}$, insbesondere also auch $df(t+m) = df(t)$. df kann allerdings auch eine kleinere Periode als m haben: Bei der Dreiballkaskade etwa ist zwar $m = 3$, aber da $df(t) = 3$ für alle t, hat df die Periode eins.

Definition: Die Periode eines Jongliermusters f ist die Periode der Funktion df.

Für gleichförmige Jongliermuster ist die Periode somit stets eins, denn außer D und V ist auch die Flugzeit und damit die Wurfhöhe konstant.

Für ein Jongliermuster mit Periode p ist die Funktion df durch die p Zahlen $df(1), \ldots, df(p)$ eindeutig bestimmt und kann sehr kompakt angegeben werden durch die Folge dieser Zahlen.

Eine Folge mit nur einem Element n bezeichnet also, je nach Parität von n, entweder eine n-Ball-Kaskade oder n-Ball-Fontäne.

Allerdings definiert nicht jede Folge $a_1 a_2 \ldots a_p$ von p Zahlen ein Jongliermuster: Aus dem gerade bewiesenen Lemma folgt sofort, daß die Anzahl der Bälle gleich dem arithmetischen Mittel der a_i ist; mithin muß dieses auf jeden Fall ganzzahlig sein. Somit können wir also nur für ungerades n einen Shower durch das Paar $n1$ definieren; die Ballanzahl ist dann gleich $\frac{1}{2}(n+1)$. Beispielsweise ist also 51 ein Dreiballshower und 91 ein Fünfballshower.

Die Bedingung der Ganzzahligigkeit des arithmetischen Mittels der a_i ist allerdings noch nicht hinreichend für die Existenz eines Jongliermusters mit Beschreibung $a_1 a_2 \ldots a_p$: In der Folge 543 etwa ist der Durchschnitt vier ganzzahlig, aber

$$f(1) = 1 + df(1) = 1 + 5 = 6 \quad \text{und} \quad f(2) = 2 + df(2) = 2 + 4 = 6$$

sind gleich, im Widerspruch zur Bijektivität von f.

Allgemein kann offenbar $a_1 a_2 \ldots a_p$ kein Jongliermuster beschreiben, wenn für irgendwelche zwei verschiedene Indizes i, j gilt $i + a_i = j + a_j$. Tatsächlich genügt schon, daß $i + a_i$ und $j + a_j$ nur kongruent modulo p sind: Für jede ganze Zahl i ist $f(i) = i + a_{i \bmod p}$, also ist $f(i) \equiv f(j) \bmod p$, falls $i \equiv j \bmod p$. Damit ist die Abbildung

$$\overline{f}\colon \begin{cases} \mathbb{Z}/p \to \mathbb{Z}/p \\ \quad t \mapsto f(t \bmod p) \bmod p \end{cases}$$

wohldefiniert; außerdem ist sie natürlich surjektiv, denn schließlich ist sogar f surjektiv. Als surjektive Abbildung zwischen zwei gleichmächtigen endlichen Mengen ist $\overline{f}$ sogar bijektiv, d.h. $\overline{f}$ ist eine Permutation der Menge $\{0, \ldots, p-1\}$.

Da $\overline{f}(t) = a_{t \bmod p}$ ist, folgt, daß die Zahlenfolge $a_1 a_2 \ldots a_p$ höchstens dann ein Jongliermuster beschreiben kann, wenn die Zahlen $i + a_i \bmod p$ eine Permutation der Menge $\{0, \ldots, p-1\}$ bilden. Unter dieser Voraussetzung ist das arithmetische Mittel der a_i automatisch ganzzahlig, denn aus

$$\sum_{i=1}^{p} (i + a_i) \equiv \sum_{j=0}^{p-1} j = \frac{p(p-1)}{2} \bmod p$$

folgt, daß

$$\sum_{i=1}^{p} a_i = \sum_{i=1}^{p}(i + a_i) - \sum_{i=1}^{p} i = \sum_{i=1}^{p}(i + a_i) - \frac{p(p+1)}{2} \equiv -p \equiv 0 \bmod p$$

ist. Tatsächlich gilt sogar

Satz: Eine Folge $a_1 a_2 \ldots a_p$ natürlicher Zahlen beschreibt genau dann ein Jongliermuster, wenn die Zahlen $i + a_i \bmod p$ eine Permutation der Menge $\{0, \ldots, p-1\}$ bilden.

Beweis: Wir wissen bereits, daß die Bedingung notwendig ist. Für die Umkehrung müssen wir zeigen, daß die Funktion

$$f \colon \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ t \mapsto t + a_{t \bmod p} \end{cases}$$

bijektiv ist, wenn die Zahlen $i + a_i \bmod p$ eine Permutation der Menge $\{0, \ldots, p-1\}$ bilden.

Sei zunächst $f(s) = f(t)$. Dann sind s und t wegen der Bijektivität von $\overline{f}$ kongruent modulo p. Insbesondere ist also $a_{s \bmod p} = a_{t \bmod p}$ und wegen

$$f(s) = s + a_{s \bmod p} \quad \text{und} \quad f(t) = t + a_{t \bmod p}$$

folgt daraus die Gleichheit von s und t, d.h. f ist injektiv.

Zum Nachweis der Surjektivität betrachten wir eine beliebige Zahl $u \in \mathbb{Z}$. Wegen der Bijektivität von $\overline{f}$ gibt es dazu eine ganze Zahl $\bar{t}$ mit

$$f(\bar{t}) = \bar{t} + a_{\bar{t} \bmod p} \equiv u \bmod p.$$

Ist $f(\bar{t}) = u + kp$ mit $k \in \mathbb{Z}$, ist daher $t = \bar{t} - kp$ ein Urbild von u. Damit ist f bijektiv, definiert also ein Jongliermuster. ■

Folgen, die der Bedingung dieses Satzes genügen, kann man leicht durch Probieren finden; eine systematische Theorie findet man in

[**8**] Fan Chung, Ron Graham: Primitive Juggling Sequences, *Am. Math. Monthly* **115** (2008), 185–194.