Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

28. März 2012

6. Übungsblatt Mathematische Visualisierung

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*
Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{V}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x^2+y^2+z^2 \\ x^3+y^3+z^3 \end{pmatrix}$$

die Divergenz und die Rotation!

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*
D sei eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktion und $\vec{V}\colon D \to \mathbb{R}^3$ ein mindestens zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Berechnen Sie

a) $\operatorname{div}\operatorname{grad} f$

b) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f$

c) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{V}$!

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*
D sei eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktion und $\vec{V}\colon D \to \mathbb{R}^3$ ein mindestens zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie:

a) $\operatorname{div}(f\vec{V}) = (\operatorname{grad} f)\cdot\vec{V} + f\operatorname{div}\vec{V}$

b) $\operatorname{rot}(f\vec{V}) = (\operatorname{grad} f)\times\vec{V} + f\operatorname{rot}\vec{V}$

c) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{V}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{V}) - \begin{pmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{pmatrix}$, wobei $\Delta f \underset{\text{def}}{=} \operatorname{div}\operatorname{grad} f$ ist für jede Funktion f.

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*
$\vec{V} = \binom{V_1}{V_2}\colon D \to \mathbb{R}^2$ sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$, und $\vec{W}\colon D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ bilde (x,y,z) ab auf den Vektor mit den Komponenten $V_1(x,y), V_2(x,y)$ und 0. Berechnen Sie $\operatorname{rot}\vec{W}$ und zeigen Sie, daß dies genau dann verschwindet. wenn die Jacobi-Matrix von $\vec{V}$ symmetrisch ist!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 19. April 2012, um 15.30 Uhr