Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

8. März 2012

3. Übungsblatt Mathematische Visualisierung

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) $\vec{b}_1, \vec{b}_1, \vec{b}_3$ sei eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das Kreuzprodukt $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 \times \vec{b}_3$!

b) Das *Spatprodukt* dreier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ ist definiert als das Skalarprodukt des Vektors $\vec{a}$ mit dem Kreuzprodukt $\vec{b} \times \vec{c}$. Zeigen Sie, daß dies die Determinante der Matrix mit Spalten $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ ist!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

W sei der Würfel mit Ecken $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

a) Berechnen Sie für jede der sechs Begrenzungsflächen von W deren nach außen zeigende Flächennormale!

b) Welche „Normalenvektoren“ ordnet das Verfahren von Gouraud den acht Eckpunkten zu?

c) Berechnen Sie ausgegehend von diesen acht Vektoren den „Normalenvektor“, den Phong dem Punkt $(x, y, 1)$ auf der Würfeloberfläche zuordnet! Wie können Sie diesen geometrisch interpretieren?

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie für jeden Punkt der Menge

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = e^{-x^2-y^2} \text{ und } x^2 + y^2 \le 2 \right\}$$

den nach außen zeigenden Normalenvektor!

b) Bestimmen Sie für jeden Punkt des zweischaligen Hyperboloids

$$H = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z^2 - x^2 - y^2 = 1 \right\}$$

den in Richtung steigender Beträge von z zeigenden Normalenvektor!

c) Berechnen Sie die Flächennormalen des Dreiecks mit Ecken $(1, 2, 3)$, $(3, 2, 1)$ und $(3, 1, 2)$!

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

Die Einheitskugel sei parametrisiert durch die Formeln

$$x = \cos\varphi \cos\lambda, \quad y = \cos\varphi \sin\lambda, \quad z = \sin\varphi\,,$$

und für vier gegebene Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \lambda_1, \lambda_2$ seien P_{ij} die Punkte mit Winkelkoordinaten (φ_i, λ_j). Zeigen Sie, daß die Punkte P_{11}, P_{12}, P_{21} und P_{22} in einer Ebenen liegen und daß deren Normalenvektor dieselbe Richtung hat wie der Vektor vom Nullpunkt zum Punkt mit Winkelkoordinaten $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ und $\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$!

Hinweis: Sie sparen viel Arbeit, wenn Sie sich zunächst überlegen, daß o.B.d.A. $\varphi_2 = -\varphi_1$ und $\lambda_2 = -\lambda_1$ angenommen werden kann.

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 15. März 2012, um 15.30 Uhr