

3. Mai 2026

8. Übungsblatt Mathematik und Information

Aufgabe 1:

- a) Gegeben seien hundert Paare von Meßgrößen (t_i, x_i) , zwischen denen ein Zusammenhang der Form $x_i = a \sin t_i + b \sin 2t_i + c \sin 3t_i + d \sin 4t_i$ vermutet wird. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf zur Berechnung jener Koeffizienten a, b, c, d , mit denen diese Beziehung im Sinne der kleinsten Quadrate am besten gilt!
- b) Wie können Sie vorgehen, wenn ein Zusammenhang der Form $x_i = a \cos(t_i + c)$ mit unbekanntem Koeffizienten a, c vermutet wird?

Aufgabe 2:

Finden Sie die Ebene im \mathbb{R}^3 , für die die Summe der Abstandquadrate zu den folgenden Punkten möglichst klein ist:

$$P_1 = (1, 1, 1), \quad P_2 = (1, 2, 3), \quad P_3 = (1, 3, 2), \quad P_4 = (2, 3, 4), \quad P_5 = (0, 4, 5), \quad P_6 = (1, -1, 3)$$

Aufgabe 3:

- a) A sei eine Matrix mit n Zeilen und $m \leq n$ Spalten und $A = U\Sigma V^T$ sei eine Singulärwertzerlegung von A . Zeigen Sie, daß die ersten m Spalten von V eindeutig durch die Spalten von U bestimmt sind!
- b) Bestimmen Sie das Bild der Sphäre

$$S = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| = 1\}$$

unter der linearen Abbildung $\varphi: \begin{cases} \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto Ax \end{cases} !$

Aufgabe 4:

- a) Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} !$
- b) Welche 2×3 -Matrix vom Rang 1 unterscheidet sich im Sinne der kleinsten Quadrate am wenigsten von A ?

Aufgabe 5:

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ habe den Rang r und die singulären Werte $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r$. Unter der L^2 -Norm $\|B\|_2$ einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ verstehen wir das Maximum der Längen der Vektoren Bx , wobei x die sämtlichen Vektoren der Länge eins durchläuft. Zeigen Sie: Ist $\|B\|_2 < \sigma_r$, so ist der Rang von $A + B$ mindestens gleich r .

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 6. Mai 2026, um 15.30 Uhr