

4. September 2016

2. Übungsblatt Mathematik und Information

Aufgabe 1: (6 Punkte)

- Wie läßt sich der Algorithmus aus der Vorlesung modifizieren, um unter *elf* gleich aussehenden Kugeln, von denen mindestens zehn dasselbe Gewicht haben, eine eventuell abweichende zu finden?
- Bestimmen Sie die maximale Anzahl von Kugeln, für die man das Problem aus *a)* mit *zweimaligem* Wiegen lösen kann! Was ändert sich, wenn bekannt ist, daß genau eine Kugel das falsche Gewicht hat? Was ändert sich, wenn bekannt ist, daß genau eine Kugel schwerer ist als der Rest?

Aufgabe 2: (5 Punkte)

X und Y seien Zufallsvariablen mit Werten in $\{0, 1\}$; ihre gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung sei gegeben durch $p(0, 0) = \frac{1}{2}$, $p(0, 1) = p(1, 1) = \frac{1}{4}$ und $p(1, 0) = 0$.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen p_X und p_Y der beiden Zufallsvariablen!
- Berechnen Sie $H(X)$, $H(Y)$, $H(X, Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$ und $I(X; Y)$!
- Was sind die KULLBACK-LEIBLER-Distanzen $d(p_X || p_Y)$ und $d(p_Y || p_X)$?

Aufgabe 3: (4 Punkte)

- Ein fairer Würfel wird geworfen; die Zufallsvariable X mit Werten in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ gibt an, welche Zahl oben liegt, Y sagt, welche unten liegt, und Z , welche nach vorne zeigt. Bestimmen Sie die wechselseitigen Informationen $I(X; Y)$, $I(X, Z)$ und $I(Z; Y)$!
- Was sind die bedingten wechselseitigen Informationen $I(X; Y|Z)$ und $I(X; Z|Y)$?
Hinweis: Die Zahlen auf gegenüberliegenden Seiten eines Würfels ergänzen sich stets zu sieben.

Aufgabe 4: (5 Punkte)

- X sei eine Zufallsvariable mit Werten im Alphabet A und $f: A \rightarrow B$ und sei eine Abbildung. Zeigen Sie, daß die Entropie der Zufallsvariable $f(X)$ höchstens gleich $H(X)$ sein kann! (*Hinweis: Berechnen Sie die gemeinsame Entropie $H(X, f(X))$ mit Hilfe der Kettenregel auf zwei Arten!*)
- Geben Sie ein Beispiel an, bei dem $H(f(X)) < H(X)$
- Zeigen Sie: Ist Y eine Zufallsvariable mit Werten in einem Alphabet B und ist $H(Y|X) = 0$, so gibt es eine Abbildung $f: A \rightarrow B$, so daß $Y = f(X)$ ist. Sie können dabei annehmen, daß sowohl X als auch Y jeden Wert aus ihrem Alphabet mit einer positiven Wahrscheinlichkeit produzieren.

Abgabe bis zum Freitag, dem 10. September 2016, um 11.55 Uhr