

26. Februar 2016

1. Übungsblatt Mathematik und Information

Aufgabe 1: (8 Punkte)

- Eine Nachrichtenquelle benutzt das Alphabet $A = \{a, b, c, d, e, f\}$; sie produziert in 50% aller Fälle den Buchstaben a , in 25% aller Fälle den Buchstaben b , und die restlichen vier Buchstaben mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Berechnen Sie ihre Entropie!
- Finden sie binäre Kodierungen für a, b, c, d, e derart, daß die Anzahl der Bits pro Buchstabe für längere Nachrichten minimal wird! Der Code soll so konstruiert sein, daß keine Zwischenräume zwischen den Bitfolgen für die einzelnen Zeichen notwendig sind.
- Was ändert sich in A und B , wenn die sechs Buchstaben allesamt gleiche Wahrscheinlichkeit haben?

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Wenn eine Nachrichtenquelle einen seltenen Buchstaben sendet, überrascht uns das mehr, als wenn sie einen häufigen sendet. Wir wollen dies quantifizieren durch eine Funktion $\ddot{U}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die den Überraschungseffekt $\ddot{U}(p)$ eines Buchstaben beschreibt, der mit Wahrscheinlichkeit p auftritt. Natürlich soll $\ddot{U}(p) > \ddot{U}(q)$ sein, falls $p < q$ ist; außerdem sollen die gesendeten Buchstaben unabhängig von ihren Vorgängern sein, so daß die Wahrscheinlichkeit eines Paares das Produkt der Wahrscheinlichkeiten der Komponenten ist und sich die Überraschungseffekte addieren: $\ddot{U}(pq) = \ddot{U}(p) + \ddot{U}(q)$. Zeigen Sie:

- Jede Funktion \ddot{U} , die diesen Bedingungen genügt, ist ein Logarithmus zu einer Basis $a > 1$.
- Im Falle $a = 2$ ist die Entropie der Quelle gleich dem Erwartungswert der Funktion \ddot{U} .

Aufgabe 3: (6 Punkte)

- Eine Nachrichtenquelle hat ein Alphabet aus n Buchstaben; ihre Wahrscheinlichkeiten sind $p_1 < p_2 < \dots < p_n$. Zeigen Sie, daß die Entropie dieser Quelle zunimmt, falls man irgendwelche $m \leq n$ dieser Wahrscheinlichkeiten durch ihr arithmetisches Mittel ersetzt!
- Eine andere Nachrichtenquelle produziert ebenfalls n Buchstaben, und es ist bekannt, daß jeder davon mindestens mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2^n}$ vorkommt. Finden Sie eine untere und eine obere Grenze für die Entropie dieser Quelle, und bestimmen Sie alle Fälle, in denen eine der beiden Grenzen angenommen werden!
- Wie sieht es aus, wenn die Quelle n Buchstaben produziert, deren Wahrscheinlichkeiten jeweils höchstens $\frac{2}{n}$ sind?

Abgabe bis zum Freitag, dem 4. März 2016, um 11.55 Uhr