Kapitel 8
Spekulationen über künftige Entwicklungen

Auch ohne Spekulation ist klar, daß der Wettlauf zwischen Kryptographie und Kryptanalyse weitergehen wird, daß die Schlüssellängen sowohl der symmetrischen als auch der asymmetrischen Kryptoverfahren weiterhin ansteigen müssen, und daß immer wieder neue Ideen sowohl zu besseren Kryptoverfahren als zu effizienterer Kryptanalyse bekannter Verfahren führen werden.

Daneben gab es in den letzten Jahren eine Reihe von Entwicklungen, die möglicherweise unser gesamtes Bild der Kryptologie verändern könnten, auch wenn sie teilweise noch sehr spekulativ sind. Diese Ansätze sollen hier im Schlußkapitel kurz vorgestellt werden.

§1: Quantenkryptographie

Die Quantenkryptographie ist von den drei hier behandelten Themen das am wenigsten spekulative; in ersten Versuchen wurde sie bereits erfolgreich getestet.

Von allen Kryptosystemen, die wir bislang kennengelernt haben, hat nur der *one time pad* beweisbare absolute Sicherheit. Das liegt nicht nur daran, daß wir nur relativ wenige Kryptosysteme kennen: Wenn man fordert, daß ein Gegner aus dem Kryptogramm *keinerlei* Information ziehen kann außer der Tatsache, daß eine Nachricht einer bestimmten Länge versandt wurde, zeigt ein Satz von SHANNON (s. etwa **[W]**, §7.3), daß ein in diesem Sinne sicheres Kryptosystem notwendigerweise mit einem Schlüssel arbeiten muß, der *mindestens* so lang ist wie die zu verschlüsselnde Nachricht; er kann also nicht kürzer sein als beim *one time pad.*

Perfekte Sicherheit von Kryptosystemen erfordert somit einen sehr hohen Aufwand an Schlüsselinformation; hinzu kommt, daß der Schlüsselaustausch ohnehin ein großes Problem aller symmetrischer Kryptoverfahren ist: Jede Schlüsselvereinbarung erfordert entweder ein persönliches Treffen der Beteiligten oder einen vertrauenswürdigen Boten oder aber ein anderes Kryptosystem, von dessen Sicherheit dann *jede* künftige Kommunikation abhängt.

Asymmetrische Kryptoverfahren werden zwar genau dazu verwendet, sie sind aber wertlos, wenn wir *perfekte* Sicherheit wollen: Die Sicherheit aller derzeit gebräuchlicher asymmetrischer Kryptoverfahren beruht nur auf *erfahrungsgemäß* schwer lösbaren Problemen; ein BAYESscher Gegner könnte jedes *public key* System sofort brechen. Im nächsten Paragraphen werden wir im übrigen Computer kennenlernen, die dies auch können, und von denen wir nur *annehmen* können, daß sie bislang und in den nächsten paar Jahren von niemandem realisiert werden können.

Die Quantenkryptographie gestattet es zwei räumlich getrennten Partnern, einen Schlüssel (beispielsweise für den *one time pad*) so zu vereinbaren, daß ein Gegner mit einer beliebig nahe bei eins liegenden vorgegebenen Wahrscheinlichkeit kein einziges Bit an Information erhalten kann.

a) Informationsübertragung mit einzelnen Photonen

Die Grundidee des Verfahrens besteht darin, die Bits durch einzelne Photonen zu kodieren. Genau wie einen ganzen Lichtstrahl kann man auch ein einzelnes Photon *polarisieren,* d.h. man kann seine Schwingungsebene festlegen und beispielsweise vereinbaren, daß eine horizontale Schwingungsebene für eine Eins und eine vertikale für eine Null stehen soll. Der Empfänger stellt dann sein Polarisationsfilter horizontal; falls er dahinter ein Photon mißt, wurde eine Null gesendet, ansonsten eine Eins.

Praktisch werden die Photonen meist approximiert durch sehr kurze Lichtblitze, die mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht mehr als ein Photon enthalten, weil sie beispielsweise so kurz sind, daß sie nur mir Wahrscheinlichkeit $1/10$ überhaupt ein Photon enthalten. Die Wahrscheinlichkeit für zwei oder mehr Photonen in einem nichtleeren Lichtblitz liegt dann bei etwa 6%, was tolerierbar ist.

Da drehbare Polarisationsfilter nur langsam auf eine neue Richtung eingestellt werden können, verwendet man in der Praxis andere Methoden: Beispielsweise läßt sich der POCKELS-Effekt aus der nichtlinearen Optik ausnutzen, wonach gewisse anisotrope Kristalle beim Anlegen einer Spannung ihren Brechungsindex ändern, oder aber man verwendet (da die Spannung beim POCKELS-Effekt typischerweise in der Größenordnung einiger hundert Volt liegen muß, was sich auch nicht so schnell schalten läßt) für jede gewünschte Polarisationsrichtung eine eigene Laserdiode oder sonstige geeeignete Lichtquelle mit dahinterstehendem Polarisationsfilter und vereinigt anschließend die Strahlengänge. Auf diese Weise lassen sich Lichtblitze mit einer Frequenz von etwa 1 MHz erzeugen.

Da nicht jeder Puls ein Photon enthält und auch während der Übertragung Photonen verloren gehen, muß der Empfänger zunächst wissen, *ob* ein Photon angekommen ist; außerdem muß er dann dessen Polarisationsrichtung bestimmen. Dazu läßt er das Photon durch einen doppelbrechenden Kristall (z.B. einen Kalkspat) gehen; je nachdem ob es parallel oder senkrecht zu dessen optischer Achse polarisiert ist, verläßt es den Kristall an einer von zwei wohldefinierten Stellen, hinter denen Photomultiplikatoren und Detektoren stehen, so daß für jede der beiden Polarisationsrichtungen ein Detektor anspricht. Natürlich müssen Sender und Empfänger synchronisiert werden; dies geschieht beispielsweise dadurch, daß eine festgelegte Zeitspanne vor jedem Puls ein heller Lichtblitz gesendet wird, der garantiert ankommt.

Entsprechende Apparaturen wurden experimentell getestet, erstmals im Oktober 1989 über eine Entfernung von damals nur 32 cm. Inzwischen ist man bei Glasfaserkabeln einer Länge von knapp 50 km angelangt, sowohl bei aufgerollter Glasfaser im Labor als auch bei „echten“ Glasfaserverbindungen wie etwa der der Swiss Telekom von Genf nach Nyon (22,8 km) unter dem Genfer See. Für eine Vernetzung innerhalb einer Stadt ist Quantenkryptographie also bereits heute praktikabel. Entsprechende Strecken über Tausende von Kilometern erscheinen nach derzeitigem Stand der Technik unwahrscheinlich: In **[ZGHMT]** wird die maximal erreichbare Distanz auf etwa 100 km geschätzt. Der Grund ist vor allem die Absorption in Glasfaserkabeln: Bei den für Telekommunikation typischen Wellenlängen um 1300 und 1550 nm hat man eine Dämpfung von 0,35 beziehungsweise 0,2 dB/km, so daß nach knapp 30 beziehungsweise 50 km nur noch ein Zehntel der abgeschickten Photonen übriggeblieben ist. Für Photonen mit nur 800 nm Wellenlänge, die sich einfacher detektieren lassen, beträgt die Dämpfung sogar 2 dB/km, man hat also schon nach fünf Kilometern neun von zehn Photonen verloren.

Verglichen mit anderen Kryptosystemen, die auch für die drahtlose Übermittlung von Nachrichten benutzt werden können, ist die Notwendigkeit einer Glasfaserverbindung überhaupt ein Nachteil: Besser wäre es, wenn man die Photonen kabellos übertragen könnte.

Das Problem hierbei ist natürlich, daß es in der Luft, vor allem bei Tageslicht, bereits ziemlich viele Photonen gibt. Das ist allerdings nicht ganz so schlimm, wie es auf den ersten Blick aussieht, denn bei hinreichender Sorgfalt kann man den Ort, die Zeit und die Wellenlänge der übermittelten Photonen sehr genau festlegen. Bei einer Wellenlänge von etwa 770 nm (im infraroten Bereich also) ist die Atmosphäre auch so durchlässig, daß sich die Verlustrate in Grenzen hält.

Wissenschaftler der National Laboratories in Los Alomos berichteten in *Nature* im Juli 2000 **[BHLMNP]**, daß sie am 13. August 1999 von 9^{30} bis 11^{30} Uhr unter dem wolkenlosen blauen Himmel von New Mexico drahtlose Quantenkryptographie über eine Entfernung von 1,6 km erfolgreich testen konnten. Fernziel ist die magische Grenze von 30 km, die es erlauben würde, Photonen an einen Satelliten zu schicken. Ein solcher Satellit ist zwar von einem festen Punkt der Erde aus nur etwa acht Minuten pro Tag in direkter Sichtverbindung; diese Zeit würde aber, bei den angestrebten Datenraten, ausreichen, um einen Schlüssel zu vereinbaren, mit dem sich deutlich mehr als die typischerweise in einem Unternehmen innerhalb von 24 Stunden anfallenden Nachrichten vom und zum Satelliten verschlüsseln lassen.

b) Protokolle zur Quantenkryptographie

Natürlich wurde bei keinem der vorgestellten Experimente genau das oben skizzierte Verfahren getestet, denn so wie beschrieben bietet es keinerlei kryptographische Sicherheit: Ein Gegner könnte einfach alle Photonen abfangen und neue auf die Reise schicken; falls er diese genauso polarisiert, wie die abgefangenen, wird weder der Sender noch der Empfänger etwas bemerken.

Hier kommt nun die Quantennatur des Lichts ins Spiel: Licht kann nicht nur vertikal oder horizontal polarisiert werden, sondern in jeder beliebigen Richtung (oder auch zirkulär). Geht es dann durch ein auf eine andere Richtung eingestelltes Polarisationsfilter, nimmt die Intensität mit dem Cosinusquadrat der Winkeldifferenz zwischen den beiden Richtungen ab, bis sie bei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen verschwindet. Das austretende Licht ist jeweils in Richtung des analysierenden Filters polarisiert.

Im Falle eines einzigen Photons kann die Intensität natürlich nicht abnehmen; das Photon wird entweder durchgelassen oder nicht. Falls die beiden Richtungen weder gleich sind noch aufeinander senkrecht stehen, ist allerdings nicht mehr deterministisch festgelegt, welcher der beiden Fälle eintritt: Bei einer Winkeldifferenz δ zwischen den beiden Polarisationsrichtungen wird das Photon mit Wahrscheinlichkeit $\cos^2 \delta$ durchgelassen und mit Wahrscheinlichkeit $\sin^2 \delta$ absorbiert. Speziell für $\delta = 45^\circ$ wird sind beide Wahrscheinlichkeiten gleich ein halb.

Der erste Ansatz, dies für kryptographische Zwecke auszunutzen, stammt von Charles Bennet und Gilles Brassard aus dem Jahr 1984; er wird heute kurz als das BB84-Protokoll bezeichnet.

Bei diesem Protokoll entscheidet sich der Sender vor dem Senden eines jeden Photons zufällig für ein Referenzsystem, bestehend entweder aus den Richtungen 0° und 90°, oder aus den Richtungen 45° und 135°. Danach entscheidet er sich, wiederum zufällig, für einen der beiden Bitwerte 0 oder 1 und kodiert beispielsweise die Eins durch Polarisationsrichtung 0° oder 45°, die Null durch 90° oder 135°. Dazu braucht er entweder zwei Pockels-Zellen oder vier Lichtquellen mit entsprechend eingestellten Polarisationsfiltern dahinter.

Praktisch würden die Zufallsentscheidungen beispielsweise durch Digitalisieren von weißem Rauschen erfolgen oder aber indem man polarisierte Photonen durch ein um 45° gedrehtes Filter schießt und mißt, welche transmittiert werden.

Auch der Empfänger wählt für jedes Bit zufällig eines der beiden Referenzsysteme; falls er dasselbe System gewählt hat wie der Absender, kann er das von diesem abgeschickte Bit messen, andernfalls erhält er ein Zufallsergebnis, was im Mittel in der Hälfte aller Fälle vorkommen wird.

Die folgende Tabelle faßt die verschiedenen Möglichkeiten für Sender und Empfänger noch einmal zusammen:

gesendet wird:	0°	0°	45°	45°	90°	90°	135°	135°
empfangen mit:	+	×	+	×	+	×	+	×
Meßergebnis:	0°	**?**	**?**	45°	90°	**?**	**?**	135°

Hier bedeutet „+“, daß der Empfänger seinen Doppelspat so orientiert, daß er 0° und 90°-Polarisierung messen kann, während „×“ entsprechend für das um 45° gedrehte Bezugssystem steht. Ein „**?**“ in der letzten Zeile soll besagen, daß hier das Meßergebnis nur vom Zufall abhängt und somit keine sinnvolle Information enthält.

Um festzustellen, welche Hälfte der gemessenen Bits sinnvolle Information enthält, informiert der Empfänger den Sender anschließend über einen gewöhnlichen, nicht abhörsicheren Kanal, welche Photonen angekommen sind und mit welchem Referenzsystem er sie gemessen hat. Der Sender teilt ihm dazu jeweils mit, ob dies die richtige Wahl war oder nicht. Dieser Austausch soll im folgenden kurz als die „öffentliche“ Diskussion bezeichnet werden.

Für die Photonen, bei denen beide mit demselben Referenzsystem gearbeitet haben, notiert sich der Sender den gesendeten und der Empfänger den gemessenen Bitwert; bis auf allfällige Übertragungsfehler sollten diese somit beide dieselbe Bitfolge notieren. Der Lauscher, der nachträglich zwar das korrekte Referenzsystem erfahren hat, nicht aber den übertragenen Bitwert, kann zumindest aus der „öffentlichen“ Diskussion nichts darüber erfahren. Seine sonstigen Möglichkeiten sollen weiter unten erörtert werden.

Zunächst aber soll hier noch das 1992 von BENNET vorgeschlagene logisch und technisch etwas einfachere B92-Protokoll vorgestellt werden. Hier verwendet der Sender nur die beiden Polarisationsrichtungen 0° für Null und 45° für Eins; der Empfänger nur 135° für Null und 90° für Eins. Insbesondere braucht der Empfänger also keinen doppelbrechenden Kristall mehr mit zwei Detektoren, sondern nur noch eine POCKELS-Zelle mit *einem* nachgeschalteten Detektor. Die möglichen Meßergebnisse sind in folgender Tabelle zusammengefaßt:

gesendet wird	0°	0°	45°	45°
gemessen wird mit	90°	135°	90°	135°
Photon wird detektiert?	nein	**?**	**?**	nein

Das „**?**“ in der letzten Zeile soll dabei bedeuten, daß der Empfänger mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein Photon mißt oder auch nicht.

Es gibt also nur zwei Kombinationen, bei denen der Empfänger überhaupt ein Photon finden kann: Falls der Empfänger mit 0° gesendet und der Empfänger mit 135° gemessen hat, oder wenn der Empfänger mit 45° gesendet und der Empfänger mit 90° gemessen hat. Falls ein Photon gemessen wird, weiß der Empfänger also, mit welcher Polarisationsrichtung gesendet wurde und kann je nachdem eine Null oder Eins notieren.

Im anschließenden „öffentlichen“ Dialog muß er dem Sender dann nur mitteilen, in welchen Positionen er Photonen gemessen hat, so daß auch der sich die Bitwerte dafür notieren kann. Man beachte, daß bei diesem Protokoll nur jedes vierte übermittelte Photon zu einem Bitwert führt.

c) Elimination der gegnerischen Information

Sowohl beim BB84- als auch beim B92-Protokoll kennen Sender und Empfänger am Ende eine Bitfolge, über die ein Gegner zumindest durch Abhören der „öffentlichen“ Diskussion nichts in Erfahrung bringen kann. Er hat aber natürlich auch noch die Möglichkeit, sich in den anfänglichen Photonenaustausch einzuschalten.

Hier wird die Quantentheorie wichtig: Ein Lauscher hat keine Möglichkeit, ein Photon zu messen, ohne es zu verändern. Falls er beispielsweise ein mit 0°-Polarisierung gesendetes Photon mit einem Doppelspat im schrägen Referenzsystem mißt, hat er anschließend mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein mit 45° oder 135° polarisiertes Photon; er weiß aber nicht, ob das Photon wirklich mit dieser Polarisierung ankam, oder ob es eine der beiden Polarisierungsrichtungen 0° und 90° hatte.

Hier ist extrem wichtig, daß mit einzelnen Photonen gearbeitet wird: Falls zwei Photonen im selben Zustand übertragen werden, kann man sie durch einen Strahlteiler trennen und jedes in einem anderen Referenzsystem messen; beim BB84-Protokoll wird dann in der „öffentlichen“ Diskussion klar, welche der Messungen zum richtigen Bitwert führte, beim B92-Protokoll ist er in drei Viertel aller Fälle sofort klar, da eine Polarisationsrichtung von 90° im +-System nur gemessen werden kann, wenn das Photon im ×-System übertragen wurde, d.h. mit Polarisationsrichtung 45°. Entsprechend kann 135° im ×-System nur gemessen werden kann, wenn das Photon mit 0° polarisiert war. Lediglich bei der Kombination (0°, 45°) ist nicht klar, welches Bit der Sender übermitteln wollte.

Mit nur einem Photon kann der Gegner jedoch nie sicher sein, welchen Zustand das gesendete Photon hatte und muß sich überlegen, was er als nächster tun will. Er hat zwei Möglichkeiten:

Als erstes könnte er das Photon einfach verschwinden lassen. Das ist aus seiner Sicht nicht sinnvoll: Falls es ihm nur darum geht, die Kommunikation unmöglich zu machen, hat er einfachere Möglichkeiten. Er muß also wieder irgendein Photon senden.

Am sichersten wäre es, ein Photon zu senden, das genau dieselbe Polarisationsrichtung hat wie das abgefangene; in diesem Fall bliebe sein Lauschen unbemerkt. Diese Möglichkeit wird aber durch die Quantentheorie ausgeschlossen, da er den Zustand des Photons nicht vollständig bestimmen kann.

Am wenigsten verfälscht er beim BB84-Protokoll, wenn er ein Photon losschickt, das die von ihm gemessene Polarisationsrichtung hat: Falls er im richtigen Referenzsystem maß, bleibt sein Eingriff bei diesem

Photon unbemerkt, andernfalls gibt es immerhin noch eine 50%-ige Wahrscheinlichkeit, daß der Empfänger, falls er im richtigen System mißt, den korrekten gesendeten Wert mißt. (Falls auch der Empfänger im falschen System mißt, wird das Bit nicht verwendet, so daß es auf seinen Wert nicht ankommt.) In etwa einem Viertel aller Fälle sorgt der Lauscher durch seinen Eingriff dafür, daß der Empfänger trotz gleichen Referenzsystems einen anderen Bitwert mißt als den ursprünglich gesendeten.

Beim B92-Protokoll kann ein Lauscher, der wie der Empfänger beim B84-Protokoll mit Doppelbrechung arbeitet, jedes zweite Bit messen: Falls er im +-System 90° mißt, muß das Photon mit 45° polarisiert gewesen sein, wenn er im $\times$-System 135° mißt, mit 45°. In diesem Fall kann er ein entsprechendes Ersatzphoton schicken. In der anderen Hälfte der Fälle muß er aber raten und verfälscht somit auch hier wieder insgesamt rund ein Viertel aller übertragener Bitwerte.

Sender und Empfänger einigen sich daher in der „öffentlichen“ Diskussion auf eine Zufallsstichprobe der notierten Bits und vergleichen diese; auf diese Weise können sie die Fehlerrate der Übertragung feststellen und durch Vergleich mit der (bekannten) Fehlerrate bei ungestörter Kommunikation abschätzen, wieviel Information der Gegner in Erfahrung bringen konnte.

Falls sie einen Abhörversuch feststellen, haben sie die Möglichkeit, die Kommunikation abzubrechen und zu einem späteren Zeitpunkt, eventuell nach genauer Untersuchung der Verbindungsstrecke, einen neuen Versuch zu wagen. Sie können aber auch versuchen, die vom Gegner gewonnene Information aus ihrer gemeinsamen Bitfolge zu eliminieren. Dies geschieht in drei Schritten:

Zunächst wird natürlich die Stichprobe aus der Bitfolge eliminiert: Diese Bits wurden in der „öffentlichen“ Diskussion verglichen und sind somit dem Gegner bekannt.

Im zweiten geht es darum, überhaupt eine gemeinsame Bitfolge zu bekommen: Durch den Vergleich einer Stichprobe kann schließlich nur die Fehler*rate* ermittelt werden, nicht aber die Stellen, an denen sich

außerhalb der Stichprobe Fehler befinden. Dieser zweite Schritt ist unabhängig von der Aktivität eines Gegners notwendig, da auch bei einer nicht abgehörten Übertragung Photonen ihren Zustand ändern können, Detektoren gelegentlich auch nicht existente Photonen melden *usw.*

Die Grundidee ist dieselbe wir in der klassischen Kodierungstheorie: Bei jeder Übertragung von Information über einen Kanal gibt es Störungen, die zur Verfälschung eines Teils der Information führen. Um diese zu eliminieren, überträgt man zusätzlich zur eigentlichen Information noch zusätzliche Prüfbits, mit deren Hilfe man eine (vom verwendeten Code abhängige) Anzahl von Bitfehlern pro Codewort korrigieren kann.

Nehmen wir etwa an, die vereinbarte Bitfolge sei aus Sicht des des Senders der Vektor $\mathfrak{v}$, aus Sicht des Empfängers aber $\mathfrak{v}' = \mathfrak{v} + \mathfrak{u}$, wobei $\mathfrak{u}$ der Fehlervektor ist.

Falls sich $\mathfrak{v}$ als Folge von Worten aus einem fehlerkorrigierenden Code auffassen ließe, könnte der Empfänger einfach die Dekodierungsabbildung dieses Codes auf $\mathfrak{v}'$ anwenden, um $\mathfrak{v}$ zu erhalten. Da aber nur ein Bruchteil der Blitze zu Komponenten von $\mathfrak{v}$ führt, hat der Sender keine Möglichkeit, $\mathfrak{v}$ entsprechend zu präparieren. Er behilft sich daher mit einem Trick: Er wählt einen zufälligen Bitvektor und kodiert diesen mit einem fehlerkorrigierenden Code, der für die ermittelte Fehlerrate ausreicht; die Länge dieses Vektors sei so gewählt, daß der enstehende Codevektor $\mathfrak{w}$ dieselbe Länge wie $\mathfrak{v}$ hat. Sodann berechnet er $\mathfrak{v} + \mathfrak{w}$ und überträgt diesen Vektor über die ungesicherte Leitung – je nach deren Qualität eventuell wiederum gesichert durch einen fehlerkorrigierenden Code. Auch die Art der verwendeten Codes wird dem Empfänger über die ungesicherte Leitung mitgeteilt.

Der Empfänger kennt dann sowohl $\mathfrak{v} + \mathfrak{w}$ als auch $\mathfrak{v}' = \mathfrak{v} + \mathfrak{u}$, er kann also deren Differenz $\mathfrak{v} + \mathfrak{w} - \mathfrak{v}' = \mathfrak{w} - \mathfrak{u} = \mathfrak{w} + \mathfrak{u}$ berechnen. (Da wir mit Bitvektoren rechnen, gibt es keinen Unterschied zwischen plus und minus.) Das ist aber das mit dem Fehler $\mathfrak{u}$ gestörte Codewort $\mathfrak{w}$, die Dekodierungsfunktion des fehlerkorrigierenden Codes erlaubt also die Rekonstruktion von $\mathfrak{w}$. Damit ist dann aber auch $\mathfrak{u}$ berechenbar und somit auch $\mathfrak{v}$.

Der Lauscher weiß weniger über $\mathfrak{v}$ als der Empfänger; er kann zwar eventuell auch etwas von der Fehlerkorrektur im zweiten Schritt profitieren, hat aber immer noch keine vollständige Information über $\mathfrak{v}$.

Dieses unterschiedliche Wissen über $\mathfrak{v}$ wird nun im dritten Schritt, der sogenannten *privacy amplification*, ausgenutzt, um $\mathfrak{v}$ auf einen Vektor $\mathfrak{z}$ zu verkürzen, über den der Lauscher mit hoher Wahrscheinlichkeit so gut wie nichts weiß. Die Längendifferenz zwischen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{z}$ entspricht dabei der Information, die der Lauscher über $\mathfrak{v}$ gewonnen hat; diese kann leicht aus der Fehlerrate berechnet werden.

Zur Berechnung von $\mathfrak{z}$ einigen sich Sender und Empfänger wieder in „öffentlicher" Diskussion, über die (zufällige) Auswahl einer Hashfunktion φ aus einer großen Anzahl vorher vereinbarter solcher Funktionen. Dies darf erst *nach* Übertragung der Photonen geschehen, denn wenn der Lauscher diese Funktion kennt, kann er seine Abhörstrategie darauf abstimmen und sie praktisch wirkungslos machen; insbesondere gibt es also immer ein kleines Restrisiko, daß der Lauscher durch vorheriges Erraten der richtigen Funktion durch deren Anwendung keine Information verliert.

Bei einem hinreichend großen Raum von Hashfunktionen ist dieses Restrisiko jedoch verschwindend klein, und eine genauere informationstheoretische Analyse zeigt, daß die Information, die der Lauscher über $\varphi(\mathfrak{v})$ hat, mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit sehr nahe bei Null liegt. Die Behandlung der Einzelheiten dieser Analyse und des dahinterstehenden Begriffsapparats würde hier zu weit führen; interessierte Leser seien auf die Originalarbeit **[BBR]** verwiesen, vor allen den dortigen Paragraphen 4.2.

Zum Schluß sei nach angemerkt, daß auch die Sätze aus **[BBR]** noch nicht beweisen, daß Quantenkryptographie wirklich sicher ist – auch nicht bis auf das erwähnte Restrisiko. Wir sind nämlich immer nur davon ausgegangen, daß der Lauscher sich darauf beschränkt, einzelne Photonen zu messen und in geeigneter Weise zu ersetzen. Tatsächlich könnte er stattdessen auch irgendwelche Interferenzerscheinungen oder andere Daten über aus vielen Photonen zusammengesetzte Zustände messen und daraus Schlußfolgerungen ziehen.

Realistischerweise muß man zur Abschätzung der Sicherheit des Verfahrens dem Gegner erlauben, alle Messungen durchzuführen, die die Quantentheorie nicht ausdrücklich verbietet, darunter auch solche, an die bislang noch niemand gedacht hat.

Unter diesen Umständen erfordert die Analyse seiner Möglichkeiten erheblich tiefere Methoden aus der Quantentheorie, als die einfache Darstellung in diesem Seminar bieten kann. Mit solchen Methoden kann man dann allerdings beweisen, daß Quantenkryptographie auch gegenüber einem Gegner mit unbeschränkten Ressourcen im erwähnten Sinne sicher ist; siehe dazu etwa **[SP]**.

d) Literaturhinweise

Eine erste Übersicht gibt der Artikel

CHARLES H. BENNET, GILLES BRASSARD, ARTHUR K. EKERT: Quantenkryptographie, *Spektrum der Wissenschaft,* Dezember 1992, S. 96–104

Neuere Entwicklungen findet man in den Kapiteln über Quantenkryptographie der Bücher

MICHAEL BROOKS [Hrsg.]: *Quantum computing and communications,* Springer, 1999 *und*

COLIN P. WILLIAMS, SCOTT H. CLEARWATER: *Explorations in quantum computing,* Springer Telos, 1997

Das erste der beiden Bücher besteht aus ziemlich kurzen und wenig technischen Darstellungen, die sich vor allem an Laien wenden; im zweiten wird auch auf die Mathematik und die Physik hinter den Verfahren eingegangen. Außerdem enthält dieses Buch eine CD mit Mathematica *notebooks* zur Simulation von Quantenprozessen.

Hier im Text zitiert wurden

[BBR] CHARLSES BENNETT, GILLES BRASSARD, JEAN MARC ROBERT: Privacy amplification by public discussion, *SIAM J. Comp.* **17** (1988), 210–229

[BHLMNP] W.T. BUTTLER, R.J. HUGHES, S.K. LAMOREAUX, G.L.

MORGAN, J.E. NORDHOLT, C.G. PETERSON: Daylight quantum key distribution over 1.6 km, *Phys. Rev. Letters* **84**, 24 *(12. Juni 2000),* 5652–5255

[SP] PETER W. SHOR, JOHN PRESKILL: Simple proof of security of the BB84 quantum key distribution protocol, *Phys. Rev. Letters* **85**,2 *(10. Juli 2000),*441–444

[W] DOMINIC WELSH: *Codes und Kryptographie,* VCH Weinheim, 1991

[ZGHMT] H. ZBINDEN, N. GISIN, B. HUTTNER, A. MULLER, W. TITTEL: Practical Aspects of Quantum Cryptographic Key Distribution, *J. Cryptology* **13** (2000), S. 207–220

§2: Quantencomputer

Die Quantentheorie ist nicht nur in der Lage, Kryptographie sicherer zu machen, sie stellt potentiell auch eine ernste Bedrohung existierender Kryptoverfahren dar, die mit einem sogenannten Quantencomputer möglicherweise leicht gebrochen werden können. Besonders gefährdet sind die asymmetrischen oder *public key*-Verfahren, mit denen wir uns in den letzten beiden Kapiteln beschäftigten.

a) Quantenmechanische Grundlagen

Zum Verständnis eines Quantencomputers müssen wir uns etwas stärker mit dem formalen Apparat der Quantenmechanik befassen als dies für die Quantenkryptographie notwendig war.

Grundlage der Beschreibung eines quantenmechanischen Systems ist immer sein *Zustandsraum,* ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen mit einem HERMITEschen Skalarprodukt. Dieses Produkt wird in der Form $\langle u|v\rangle$ geschrieben, und von daher hat sich die DIRACsche Konvention eingebürgert, die Elemente von V in der Form $|v\rangle$ zu schreiben. Da $\langle u|v\rangle$ eine *bracket* ist, wird $|v\rangle$ allein meist kurz als ein *ket* bezeichnet.

Diese Schreibweise mag einem Mathematiker auf den ersten Blick verwirrend erscheinen; er sollte sich aber klarmachen, daß es hier nur um ein Symbol geht und sich an der Mathematik natürlich nichts ändert, egal ob man einen Vektor als $\mathfrak{v}$, $\vec{v}$ oder eben $|v\rangle$ schreibt.

Für Leser, die HERMITEsche Skalarprodukte nicht aus der Linearen Algebra kennen, sei hier die Definition kurz wiederholt: Grundsätzlich soll sich ein HERMITEsches Skalarprodukt genauso verhalten, wie das klassische Skalarprodukt im $\mathbf{R}^n$, jedoch gibt es damit das Problem, das nach der üblichen Definition etwa

$$\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = 1^2 + i^2 = 1 - 1 = 0$$

wäre; wenn wir das Produkt eines Vektors mit sich selbst in der üblichen Weise als Länge interpretieren, hätte also ein deutlich vom Nullvektor verschiedener Vektor die Länge null, was natürlich allen unseren Vorstellungen von Länge widerspricht.

Deshalb werden die Komponenten des zweiten Vektors komplex konjugiert; wir setzten also für Vektoren aus $\mathbb{C}^n$

$$\left\langle \begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix} \right\rangle = z_1\overline{w}_1 + \cdots + z_n\overline{w}_n\ ,$$

so daß etwa

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} \right\rangle = 1^2 + i\overline{i} = 2$$

ist. Dadurch geht natürlich die Symmetrie des Produkts verloren und auch die Linearität im zweiten Argument: Offensichtlich ist nun

$$\langle v|\lambda w\rangle = \overline{\lambda}\ \langle v|w\rangle\ .$$

Die formale Definition eines HERMITEschen Skalarprodukts ist

Definition: Ein HERMITEsches Skalarprodukt auf einem komplexen Vektorraum V ist eine Abbildung

$$\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle : V \times V \to \mathbb{C};\quad \big(|v\rangle\,, |w\rangle\big) \mapsto \langle v|w\rangle$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. $\langle \lambda v_1 + \mu v_2|w\rangle = \lambda\,\langle v_1|w\rangle + \mu\,\langle v_2|w\rangle$
2. $\langle v|w\rangle = \overline{\langle w|v\rangle}$
3. $\langle v|v\rangle \geq 0$ und $\langle v|v\rangle = 0$ genau dann, wenn $|v\rangle$ der Nullvektor ist.

Die Vektoren aus V beschreiben die möglichen Zustände des Systems, wobei zueinander proportionale Vektoren denselben Zustand beschreiben; der tatsächliche Zustandsraum ist also der projektive Raum $\mathbb{P}(V)$. Da es somit auf die Länge des Zustandsvektors nicht ankommt, wird diese vielfach auf eins normiert.

Meßbare physikalische Größen werden durch HERMITEsche Operatoren $A\colon V \to V$ beschrieben, d.h. durch Operatoren, für die gilt

$$\langle Av|Aw\rangle = \langle v|w\rangle$$

für alle $|v\rangle, |w\rangle \in V$. Schreibt man den Operator A bezüglich einer Orthonormalbasis als Matrix, so ist das äquivalent zur Gleichung

$$^tA = \overline{A}\,.$$

Ist das System vor der Messung im Zustand, der durch den Einheitsvektor $|v\rangle$ beschrieben wird, so ist sein Zustand nach der Messung ein Eigenvektor von A und der Meßwert ist der zugehörige Eigenwert.

Genau wie es zu einer symmetrischen reellen Matrix immer eine Orthonormalbasis des $\mathbf{R}^n$ aus Eigenvektoren der Matrix A gibt, gibt es zu einem HERMITEschen Operator immer eine Orthonormalbasis $\mathfrak{B}$ von V aus Eigenvektoren von A; falls die zugehörigen Eigenwerte alle verschieden sind, ist die Wahrscheinlichkeit für den Eigenwert λ als Meßergebnis gleich dem Betragsquadrat des Produkts von $|v\rangle$ und $|w\rangle$, wobei $|w\rangle$ der Eigenvektor der Länge eins zum Eigenwert λ ist.

Betrachten wir als Beispiel die Photonen aus dem vorigen Kapitel. Der Zustandsraum für ein Photon ist ein zweidimensionaler Vektorraum, in dem die Polarisationsrichtung φ etwa durch den Vektor $\binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ repräsentiert wird; im Falle eines reellen Vektorraums wäre jeder Vektor proportional zu einem solchen Einheitsvektor. Daß wir komplexe Vektorräume betrachten, bedeutet, daß zum Zustand auch noch ein Phasenfaktor gehört, der für die vorgestellten Protokolle zur Quantenkryptographie aber keine Rolle spielt.

Die Messung der Polarisationsrichtung mit einem Polarisationsfilter mit Durchlaßrichtung ψ wird durch den Operator

$$A_\psi = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\psi - \sin^2\psi & 2\sin\psi\cos\psi \\ 2\sin\psi\cos\psi & \sin^2\psi - \cos^2\psi \end{pmatrix}$$

modelliert; seine Eigenwerte sind ± 1 mit Eigenvektoren

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix}\cos\psi\\ \sin\psi\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad |v_{-1}\rangle = \begin{pmatrix}-\sin\psi\\ \cos\psi\end{pmatrix}.$$

Bei einem in Richtung φ polarisierten Photon liegt also die Wahrscheinlichkeit für +1 beim Quadrat von

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\psi\\ \sin\psi\end{pmatrix} = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi = \cos(\varphi-\psi)\,,$$

die für -1 entsprechend bei $\sin^2(\varphi-\psi)$.

b) Quantenregister und QBits

In einem klassischen Computer werden Bits dargestellt durch die beiden Zustände eines bistabilen Schaltelements wie etwa eines Flipflops oder durch eine Magnetisierungsrichtung oder etwas ähnliches. Unabhängig von der physikalisch-technischen Realisierung hat man immer ein Element, das sich stets in einem von zwei wohldefinierten Zuständen befindet; diese werden traditionell als 0 und 1 bezeichnet.

Angenommen, wir verwenden stattdessen ein Photon. Das ist beim heutigen Stand der Technologie zwar völlig unrealistisch, aber es ist wohl die anschaulichste Art, das Prinzip eines Quantencomputers zu verstehen; weiter unten werden wir auch realitätsnähere Ansätze diskutieren.

Zur Kodierung eines Bits können wir etwa vereinbaren, daß die horizontale Polarisation einer Null und die vertikale einer Eins entsprechen soll; mit einem Polarisationsfilter lassen sich Photonen in jedem der beiden Zustände unschwer produzieren.

Wir können aber auch anders vorgehen: Wir produzieren ein Photon mit Polarisationsrichtung 45° und lassen es so auf einen Doppelspat fallen, daß der eine der beiden austretenden Strahlen horizontal polarisiert ist, der andere vertikal.

Da nur ein Photon in den Kristall eintritt, kann auch nur eines austreten; indem wir zwei Detektoren in die beiden austretenden Strahlengänge stellen, können wir leicht feststellen, in welchem der beiden Strahlen sich das Photon befindet.

Dieses Aufstellen von Detektoren ist allerdings eine Messung, der Zustandsvektor des Photons wird also auf einen Eigenraum eines Operators projiziert. Was wir messen, ist daher nicht wirklich das aus dem Kristall austretende Photon. Dessen Zustand ist nach der experimentell sehr gut bestätigten Lehre der Quantentheorie, solange es keiner Messung unterworfen wird, eine Überlagerung der beiden möglichen Meßergebnisse: Bezeichnen wir die beiden möglichen Zustände *nach* der Messung mit $|0\rangle$ und $|1\rangle$, so befindet sich das Photon *vor* der Messung in einem Zustand, der durch den (auf Länge eins normierten) Vektor

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\,|0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}\,|1\rangle$$

beschrieben wird. Hier sind also die beiden Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ überlagert, und falls der Winkel 45° durch einen anderen ersetzt wird, lassen sich auch die Koeffizienten vor $|0\rangle$ und $|1\rangle$ beliebig verändern.

Ein solches quantenmechanisches System mit einem zweidimensionalen Zustandsraum bezeichnen wir als ein *QBit.* Im Gegensatz zu einem gewöhnlichen Bit, das nur die Werte 0 und 1 annehmen kann, sind für ein QBit also beliebige Werte der Form

$$\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle \qquad \text{mit} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

möglich. ($\alpha^2 + \beta^2 = 1$ bei Normierung auf Länge eins)

Setzt man mehrere QBits zusammen, entsteht ein Quantenregister. Wichtig ist dabei, daß dieses Quantenregister ein einziges quantenmechanisches System ist, es ist also beispielsweise durchaus möglich, daß der Zustand „alle QBits sind $|0\rangle$" mit dem Zustand „alle QBits sind $|1\rangle$" überlagert ist. In diesem Fall wüßten wir zwar nicht im voraus, welches Ergebnis eine Messung eines QBits aus dem Register hätte, wir könnten uns aber sicher sein, daß nach der Messung des ersten QBits jede Messung eines weiteren QBits zum selben Ergebnis führte.

In DIRAC-Notation schreibt man

$$|\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\rangle$$

für den Zustand, in dem das i-te QBit den Wert $\alpha_i \in \{0, 1\}$ hat; die 2^n Vektoren, die man auf diese Weise erhält, bilden offenbar eine Basis des Zustandsraums für das Quantenregister. (Mathematisch betrachtet ist dieser das Tensorprodukt $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ der Zustandsräume V_i der einzelnen QBits.) Der Zustand eines Quantenregisters wird also beschrieben durch eine Linearkombination von Vektoren der obigen Form wie etwa

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\,|00\ldots0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}\,|11\ldots1\rangle$$

für das Beispiel aus dem vorigen Absatz.

c) Quantencomputer

Genau wie ein klassischer Computer den Inhalt klassischer Register manipuliert, manipuliert ein Quantencomputer den Inhalt von Quantenregistern.

Das fundamentale Grundgesetz der Quantenmechanik, die SCHRÖDINGER-Gleichung, sagt aus, wie sich deren Inhalt verändern kann: Ist $|\psi(t)\rangle$ der Zustandsvektor zur Zeit t und wird das System durch keine äußeren Einflüsse gestört, so ist

$$i\hbar \frac{\partial\,|\psi(t)\rangle}{\partial t} = H\,|\psi(t)\rangle\ ,$$

wobei H den HAMILTONschen Operator des Systems bezeichnet, jenen HERMITEschen Operator also, der die Gesamtenergie des Systems beschreibt, und $\hbar = h/2\pi \approx 1{,}054589 \times 10^{-34}$ Js das durch 2π dividierte PLANCKsche Wirkungsquantum.

Die SCHRÖDINGER-Gleichung ist ein System linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten; seine Lösung läßt sich mit Hilfe der Matrixexponentialfunktion sofort hinschreiben:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}\,|\psi(0)\rangle = U(t)\,|\psi(0)\rangle \quad \text{mit} \quad U(t) = e^{-iHt/\hbar}\ .$$

Dabei ist

$$U(t) \cdot \overline{U(t)}^T = e^{-iHt/\hbar} \cdot e^{i\overline{H}^T t/\hbar} = E$$

die Einheitsmatrix, denn $\overline{H}^T = H$ nach Definition eines HERMITEschen Operators. Somit ist der Operator $U(t)$, der die zeitliche Entwicklung des Systems beschreibt, unitär und insbesondere auch invertierbar.

Diese Invertierbarkeit ist ein großer Unterschied zu klassischen Computern: Die Addition $3+5=8$ etwa läßt sich nicht invertieren, denn das Ergebnis „8“ enthält keine Information mehr darüber, wie es zustandegekommen ist. Langfristig werden aber möglicherweise auch klassische Computer bei immer weitergehender Miniaturisierung der Bauelemente mit reversibler Logik rechnen müssen, denn die einzige Stelle beim Rechnen, bei der Energieverbrauch aus physikalischen Gründen nicht vermieden werden kann, ist die Vernichtung von Information.

Von den klassischen Logikoperationen, mit denen heutige Computer arbeiten, ist nur die Negation reversibel und natürlich auch unitär: Bezüglich der Basis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ des Zustandsraums eines Photons wird sie durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Konjunktion und Disjunktion sind aus demselben Grund wie die Addition nicht reversibel: Für eine reversible Logikoperation muß die Anzahl der Ausgangsbits gleich der der Eingangsbits sein. Ein Beispiel einer reversiblen Operation mit zwei Eingangsbits ist die kontrollierte Negation

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} (x, \neg y) & \text{falls } x = 1 \\ (x, \quad y) & \text{falls } x = 0 \end{cases} = (x, x \oplus y),$$

wobei $\oplus$ die Addition modulo 2 bezeichnet.

Bezüglich der Basis $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ wird die kontrollierte Negation durch die unitäre Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben, und sie ist auch quantenmechanisch realisierbar.

Wichtiger ist das TOFFOLI-Gate, das auf drei QBits operiert:

$$(x,y,z) \mapsto T(x,y,z) \underset{\text{def}}{=} \big((x, y, z \oplus (x \wedge y)\big),$$

denn mit seiner Hilfe lassen sich auf Kosten eines zusätzlichen Bits „und“ und „oder“ realisieren:

$$T(x,y,|0\rangle) = (x, y, x \wedge y) \quad \text{und} \quad T(\neg x, \neg y, |1\rangle) = (\neg x, \neg y, x \vee y).$$

In der Standardbasis des Zustandsraums für drei QBits vertauscht das TOFFOLI-Gate einfach die beiden Vektoren $|110\rangle$ und $|111\rangle$, es wird also durch eine unitäre Matrix beschrieben. Seine quantenmechanische Realisierung *ohne* Phasenverschiebung ist etwas trickreich, aber möglich. Insbesondere kann es als eine Folge von Operationen mit jeweils höchstens zwei Eingangsvariablen realisiert werden, was für die technische Realisierung von großer Bedeutung ist: Interaktionen zwischen drei Quantenbits gleichzeitig wären zu weit jenseits des derzeit Realisierbaren.

Ein Quantencomputer kann also mit der Negation und dem TOFFOLI-Gate alle logischen Berechnungen durchführen. Arithmetische Operationen können nach den klassischen Regeln der Schaltalgebra auf logische zurückgeführt werden; auch sie sind somit in einem Quantencomputer realisierbar.

d) Der Algorithmus von Shor

Als Beispiel für die kryptographische Relevanz eines Quantencomputers wollen wir die Faktorisierung einer ganzen Zahl N betrachten.

Der dümmste Ansatz zur Faktorisierung von Hand beseht darin, daß wir x und y unabhängig voneinander die Zahlen von 2 bis N durchlaufen lassen und jeweils das Produkt xy berechnen; falls dieses gleich N ist, haben wir eine Zerlegung von N gefunden.

Für eine etwa hundertstellige Zahl N (mit deren Faktorisierung ein heutiger Computer keine größeren Schwierigkeiten hat) wären hierzu rund 10^{200} Multiplikationen notwendig, mit klassischen Computern ein Ding der Unmöglichkeit: Selbst wenn alle heutigen Computer seit Beginn des Universums daran gerechnet hätten, wäre erst ein verschwindend kleiner Bruchteil der Produkte berechnet.

Für einen Quantencomputer dagegen sind diese 10^{200} Multiplikationen überhaupt kein Problem: Da $10^{100} \approx 2^{332}$ ist, nehmen wir zwei Quantenregister x, y aus etwa 350 QBits und bringen beide in den Zustand, in dem alle Basisvektoren denselben Koeffizienten haben. Sodann berechnen wir das Produkt der beiden Registerinhalte auf reversible Weise, d.h. wir berechnen das Tripel (x, y, xy). Dieses ist in einem Zustand, in dem alle Kombinationen (x, y, xy) mit $0 \leq x, y < 2^{350}$ überlagert sind, insbesondere also auch die, für die $xy = N$ ist. Der Quantencomputer kann also all diese Multiplikationen gleichzeitig durchführen.

Damit ist allerdings leider das Faktorisierungsproblem noch nicht gelöst, denn wir müssen das Tripel ja auch noch messen. Dabei kollabiert der überlagerte Zustand und wir erhalten als Ergebnis ein Tripel (x, y, xy) aus natürlichen Zahlen, über das wir keinerlei Kontrolle haben. Insbesondere ist die Wahrscheinlichkeit, daß an dritter Stelle die Zahl N steht, verschwindend gering, so daß dieser sehr einfache Ansatz definitiv nicht zum Ziel führt.

Ein Quantencomputer kann also zwar sehr viele Operationen gleichzeitig durchführen, aber dies läßt sich nur ausnutzen, wenn man das Ziel der Rechnung anschließend auch wirklich messen kann.

Deshalb geht der Algorithmus von SHOR das Faktorisierungsproblem völlig anders an: Wie von FERMAT bis hin zu den modernsten Siebalgorithmen immer wieder ausgenutzt wird, hat man dann eine gute Chancen, eine Zahl zu faktorisieren, wenn man sie selbst oder ein Vielfaches als Differenz zweier Quadrate darstellen kann: Ist

$$kN = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) ,$$

so kann man hoffen, daß $\mathrm{ggT}(x - y, N)$ und $\mathrm{ggT}(x + y, N)$ echte Teiler von N sind.

Der Algorithmus von SHOR nutzt dies aus, indem er für eine zufällig gewählte Zahl x zwischen 2 und $N - 2$ ihre Ordnung modulo N berechnet, d.h. die kleinste natürliche Zahl r, für die

$$x^r \equiv 1 \bmod N$$

ist. Eine solche Zahl r muß es nicht geben; für $N = 4$ und $x = 2$ beispielsweise gibt es keine. Elementare zahlentheoretische Betrachtungen zeigen, daß die zu N teilerfremde Zahlen bezüglich der Multiplikation modulo N eine zyklische Gruppe bilden; genau für diese Zahlen gibt es also ein solches r, und für alle anderen ist der ggT von x und N ein echter Teiler von N.

Falls r existiert und ungerade ist, hat man Pech gehabt und beginnt noch einmal mit einem neuen x; andernfalls ist

$$(x^{r/2+1} + 1)(x^{r/2} - 1) \equiv 0 \bmod N ,$$

wir sind also genau in der obigen Situation und können ggTs berechnen. Falls dies keine echten Teiler sind, haben wir ebenfalls Pech gehabt und müssen mit einem neuen x von vorne anfangen. Da r die kleinste Zahl ist, für die $x^r - 1$ durch N teilbar ist, passiert das genau dann, wenn $x^{r/2} + 1$ durch N teilbar ist, also im Fall, daß $x^{r/2} \equiv -1 \bmod N$. Der Algorithmus ist somit genau dann nützlich, wenn dieser Fall nicht allzu oft (oder gar immer) eintritt.

Ist etwa p eine ungerade Primzahl und $N = p^n$, so kann bei geraden r die Primzahl p keinesfalls Teiler *beider* Faktoren

$$x^{r/2+1} + 1 \qquad \text{und} \qquad x^{r/2} - 1$$

sein, da sich die beiden nur um zwei unterscheiden. Also ist einer der beiden durch p^n teilbar, was natürlich nur der erste sein kann. Somit versagt der Algorithmus von SHOR in diesem Fall für *jedes* x.

Im kryptographisch besonders interessanten Fall, daß $N = pq$ Produkt zweier ungerader Primzahlen ist, sieht es aber – je nach Standpunkt leider oder zum Glück – ganz anders aus: Da modulo einer Primzahl $y \equiv \pm 1$ die beiden einzigen Lösungen der Gleichung $y^2 \equiv 1$ sind, zeigt eine einfache, wenn auch etwas langwierige Argumentation über den chinesischen Restesatz, daß für mindestens die Hälfte aller zu N primen Zahlen die Ordnung r gerade und $x^{r/2}$ nicht kongruent -1 modulo N ist. Hier liegt also die Erfolgswahrscheinlichkeit bei über 50%; wiederholt man die die Rechnung mit einem anderen x, kommt man bereits auf 75%, nach sieben zufällig gewählten Werten von x auf über 99%, nach zehn auf über 99,9%. Falls es also gelingt, r effizient zu berechnen, ist dieses Verfahren extrem gefährlich für das RSA-System.

Die Berechnung von r stellt uns vor ein ähnliches Problem wie die Berechnung eines diskreten Logarithmus, und in der Tat führt der Algorithmus von SHOR zur Bestimmung von r auch auf einen Algorithmus zur Berechnung diskreter Logarithmen; auch die Verallgemeinerung auf entsprechende Probleme für elliptische Kurven stellt keine prinzipiellen Probleme.

SHOR geht folgendermaßen vor: Für $N < 2^L$ braucht er einen Quantencomputer mit zwei Quantenregistern der Längen $2L$ beziehungsweise L. Im ersten speichert er die Überlagerung aller Zahlen a von 0 bis $2^{2L} - 1$, für das zweite berechnet er den Zustand x hoch erstes Register modulo N. Der Aufwand hierfür liegt für die klassische Berechnungsmethode durch fortgesetztes Quadrieren in der Größenordnung von L^3 Operationen.

Der Computer befindet sich dann in einem Zustand, in dem alle Paare $(a, x^a \bmod N)$ mit $0 \leq a < 2^{2L}$ überlagert sind. Wird nun der Inhalt des zweiten Registers gemessen, ist die Chance für das Messen der Zahl eins natürlich verschwindend gering; das Meßergebnis wird *irgendeine* Zahl b zwischen 0 und $N - 1$ sein.

Durch die Messung des zweiten Registers hat sich aber der Inhalt des ersten verändert: Der *gesamte* Computer ist *ein* quantenmechanisches System, das in einen Zustand gebracht wurde, in dem der Inhalt des zweiten Registers gleich x hoch dem Inhalt des ersten Registers ist. Die Messung des zweiten Registers kann an dieser Tatsache nichts ändern, und da das zweite Register nach der Messung die Zahl b enthält, kann eine Messung des ersten Registers nun nur noch ein Ergebnis a liefern, für das $x^a \bmod N = b$ ist. Ein solches Ergebnis nützt uns aber nichts, und deshalb dürfen wir das erste Register keinesfalls messen.

Da das erste Register doppelt so lang ist wie das zweite, befindet es sich immer noch in einem überlagerten Zustand, nämlich in der Überlagerung aller Zahlen $0 \leq a < 2^{2L}$, für die $x^a \equiv b \bmod N$ ist. Ist a_0 die kleinste solche Zahl, sind dies genau diejenigen Zahlen der Form $a_0 + kr$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, die kleiner sind als 2^{2L}; hierbei ist r die gesuchte Ordnung.

Bei den Zahlen im überlagerten Zustand im Register handelt es sich also um eine periodische Folge von $m = \left[\frac{2^{2L} - a_0}{r}\right]$ Zahlen; was uns interessiert, ist die Periode r.

Die Periode eines Gitters läßt sich optisch aus dem Beugungsspektrum des Gitters bestimmen; genauso wollen wir auch hier vorgehen und nicht den *Inhalt* des ersten Registers messen, sondern so etwas wie sein *Beugungsspektrum.* Ein wesentlicher Aspekt der Quantentheorie ist schließlich, daß auch einander ausschließende Zustände eines Teilchens miteinander interferieren: Falls etwa ein Photon zwei mögliche Wege zu einem Punkt zurücklegen kann, tritt auch im Falle eines einzigen Photons Interferenz auf.

Das rechnerische Analogon zum Beugungsspektrum ist die *Quanten-*FOURIER-*Transformation.* Ersteres leitet man bekanntlich aus dem HUYGENschen Prinzip ab, wonach jeder Punkt, in dem das Gitter durchlässig ist, Ausgangspunkt einer neuen Welle ist; diese wird beschrieben durch eine komplexe Exponentialfunktion, und das Beugungsspektrum ist gegeben durch die Summe aller dieser Exponentialfunktionen.

Ganz entsprechend ordnet die Quanten-FOURIER-Transformation eines Registers der Länge $2L$ ordnet dem Inhalt $|x\rangle$ dieses Registers (aufgefaßt als Zahl zwischen 0 und $2^{2L} - 1$ oder als Überlagerung mehrerer solcher Zahlen) den Zustand

$$2^{-L} \sum_{\nu=0}^{2^{2L}-1} e^{2\pi |x\rangle \nu / 2^{2L}} \, |\nu\rangle$$

zu. Man überzeugt sich leicht, daß dies eine unitäre Abbildung definiert; dies liegt einfach an der wohlbekannten Formel

$$\sum_{\nu=1}^{m} e^{k\nu/m} = \begin{cases} m & \text{falls } m|k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

hinter der die Symmetrie der n-ten Einheitswurzeln zum Nullpunkt der komplexen Zahlenebene steckt – falls $n = m/ggT(m,k)$ größer als eins ist.

Schwieriger ist es, diese Abbildung quantenmechanisch zu realisieren; dazu braucht man die sogenannte schnelle FOURIER-Transformation, die durch geschickte Gruppierung der Summanden nach dem Prinzip *Teile und herrsche* eine deutlich effizientere Berechnung der Abbildung erlaubt und deren einzelne Rechenschritte sich leicht in Quantenprozesse übersetzen lassen, deren Ergebnis jeweils nur von zwei QBits abhängt.

Diese Quanten-FOURIER-Transformation wird nun also auf das erste Register angewandt; dadurch kommt dieses in den Zustand

$$2^{-L}\sum_{\nu=0}^{2^{2L}-1}\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{\mu=1}^{m}e^{2\pi i(a_0+\mu r)\nu/2^{2L}}\,|\nu\rangle$$
$$=\frac{1}{2^L\sqrt{m}}\sum_{\nu=0}^{2^{2L}-1}e^{2\pi i a_0}\left(\sum_{\mu=1}^{m}e^{2\pi i r\mu\nu/2^{2L}}\right)|\nu\rangle \;.$$

Da $m=\left[\frac{2^{2L}-a_0}{r}\right]\approx 2^{2L}/r$ ist, läßt sich die Klammer approximieren durch

$$\sum_{\mu=1}^{m}e^{2\pi i r\mu\nu/2^{2L}}\approx\sum_{\mu=1}^{m}e^{2\pi i\mu\nu/m}=\begin{cases} m & \text{falls } m|\nu\\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \;.$$

Der Zustand des ersten Registers ist also ungefähr gleich

$$\frac{1}{2^L\sqrt{m}}\sum_{\nu=0}^{m-1}e^{2\pi i a_0}m\,|r\nu\rangle=\frac{e^{2\pi i a_0}\sqrt{m}}{2^L}\sum_{\nu=0}^{m-1}|r\nu\rangle \;.$$

(Durch Aufsummieren der geometrischen Reihe kann man natürlich auch leicht den genauen Wert der geometrischen Reihe berechnen.)

Falls wir ein Register messen, dessen Inhalt durch die approximative Zustandsfunktion beschrieben wird, erhalten wir mit *Sicherheit* ein Vielfaches von r als Ergebnis, wobei die verschiedenen Vielfachen allerdings gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

Die exakte Zustandsfunktion führt zu leichten Abweichungen davon: Die Betragsmaxima der Koeffizienten liegen nun bei den Vielfachen der wirklichen Periode $2^{2L}/r$, aber weiter davon entfernt liegende Werte sind nicht mehr unmöglich, sondern nur noch unwahrscheinlich.

Wir wiederholen deshalb das Experiment mit demselben x mehrfach (eine genauere Analyse zeigt, daß etwa L Wiederholungen mit hoher Wahrscheinlichkeit genügen) und haben dann verschiedene Meßwerte

für ν. Für die meisten, wenn nicht gar alle dieser Werte gibt es eine Zahl λ, so daß

$$\nu\approx\lambda\frac{2^{2L}}{r}\qquad\text{oder}\qquad\frac{\nu}{2^{2L}}\approx\frac{\lambda}{r}$$

ist.

In der hinteren Gleichung ist die linke Seite bekannt; von der rechten kennen wir weder Zähler noch Nenner. Wir wissen aber, daß der Nenner r als Ordnung von x modulo N kleiner als N ist und damit sehr viel kleiner als der Nenner 2^{2L} auf der linken Seite, der ja größer als N^2 ist. Zur Bestimmung von r müssen wir also für die verschiedenen Brüche $\lambda/2^{2L}$ Approximationen finden, deren Nenner kleiner ist als N.

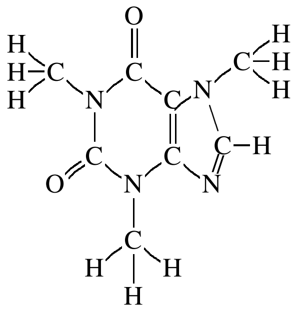
Die besten rationalen Approximationen einer reellen Zahl mit Nennern einer vorgegebenen Größenordnung liefert, wie wir in Kap. 6, §6f, gesehen haben, deren Kettenbruchentwicklung; also berechnen wir für jeden Meßwert μ alle Konvergenten des Kettenbruchs zu $\frac{\mu}{2^{2L}}$ mit Nenner kleiner N und suchen dann nach einem Nenner r, der bei möglichst vielen Meßwerten auftritt. Dieser ist ein Kandidat für die gesuchte Ordnung von x, und wir verfahren damit wie im SHORschen Algorithmus angegeben.

e) Experimentelle Realisierung

Das große Problem beim Bau von Quantencomputern ist die *Dekohärenz:* Ein überlagerter Zustand bleibt nur erhalten, wenn keinerlei Wechselwirkung mit äußeren Systemen eintritt; dies läßt sich auch mit großem Aufwand nur für sehr kurze Zeitspannen sicherstellen. SHOR entwickelte *Quantencodes,* die nach dem Vorbild klassischer fehlerkorrigierender Codes ein gewisses Maß an Dekohärenz verkraften können, aber auch damit läßt sich diese Zeitspanne nur begrenzt ausdehnen. Ein Quantencomputer auf der Basis von Photonen mit ihren extrem kurzen Dekohärenzzeiten erscheint deshalb im Augenblick jenseits jeder technischen Realisierbarkeit.

Am vielversprechendsten ist im Augenblick ein Ansatz, der mit NMR-Spektroskopie arbeitet. Bei dieser handelt es sich um eine schon seit über dreißig Jahren gebräuchliche chemische Analysemethode, die inzwischen auch für bildgebende Verfahren in der Medizintechnik eingesetzt wird. Sie beruht auf der magnetischen Resonanz gewisser Atomkerne. Zwar zeigen nur wenige Isotopen Kernresonanz, aber es handelt sich dabei um Isotope häufiger und wichtiger Atome: ^{1}H, ^{2}H, ^{10}B, ^{11}B, ^{13}C, ^{14}N, ^{15}N, ^{17}O, ^{19}F, ^{29}Si und ^{31}Si.

Als Beispiel eines für einen ersten Quantencomputer geeigneten Moleküls wurde (nicht unbedingt ganz ernsthaft) das *Koffein* vorgeschlagen, das in der Tat genug solche Atome enthält, um einen kleinen „Supercomputer in der Kaffeetasse“ zu realisieren:



Protonen und Neutronen in einem Atom haben jeweils Spin $\pm 1/2$, wobei sich benachbarte Protonen sowie benachbarte Neutronen jeweils antiparallel ausrichten. Bleibt dabei ein Gesamtspin übrig, richtet sich das Atom in einem umgebenden Magnetfeld der Stärke von etwa 9 bis 15 Tesla in einer von wenigen wohldefinierten Richtungen aus, zwischen denen es durch Aufnahme beziehungsweise Abgabe von Strahlungsquanten wechseln kann. Mit geeigneten Radiowellen läßt sich also zwischen verschiedenen Zuständen hin- und herschalten; durch Aufnahme eines Resonanzspektrums lassen sich die (über viele Atome gemittelten) Zustände ablesen. Dadurch, daß man hier nicht mit Quantenzuständen einzelner Partikel arbeitet, sondern über viele Partikel mittelt, wird auch das Problem der Dekohärenz entschärft. Man rechnet damit, daß ein solcher Computer schon bald die Zahl fünfzehn faktorisieren kann.

QBits in einzelnen Atomen benutzt die um 1995 in Innsbruck konzi-

pierte *Ionenfalle.* Hier werden Ionen durch elektromagnetische Felder in einer linearen Anordnung gehalten; die QBits werden kodiert durch Anregungszustände der Ionen (von denen jedes durch einen eigenen Laser kontrolliert wird) und der Gitterschwingungen (Phononen) zwischen den einzelnen Ionen. Überlagerte Zustände, die mehrere QBits umfassen, werden über die Vibrationsenergie ihres Schwerpunkts kontrolliert.

Am National Institut of Standards in Boulder, Colorado, wurde so die kontrollierte Negation implementiert; Faktorisierung kleiner Zahlen erscheint durch Weiterentwicklung und Vergrößerung der Apparatur möglich, allerdings müssen dazu noch einige technische Probleme gelöst werden.

Für weiteres und insbesondere auch andere physikalische Ansätze sei auf die zitierte Literatur verwiesen.

f) Literaturhinweise

Auch hier sind als erstes die beiden schon im vorigen Kapitel erwähnten und kurz charakterisierten Bücher

MICHAEL BROOKS [Hrsg.]: *Quantum computing and communications,* Springer, 1999 *und*

COLIN P. WILLIAMS, SCOTT H. CLEARWATER: *Explorations in quantum computing,* Springer Telos, 1997

zu nennen. Ein Buch, das speziell auf die algorithmische Seite Bezug nimmt (oft eher anhand von Beispielen als einer klaren Darstellung des Algorithmus) ist

ARTHUR O. PITTENGER: *An introduction to quantum computing algorithms,* Birkhäuser, Boston, 1999

Die Originalarbeit zum Algorithmus von SHOR wurde kürzlich in überarbeiteter Form nachgedruckt:

PETER W. SHOR: Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer, *SIAM Rev.* **41** (1999), S. 303–332

Einen weiteren Übersichtsartikel, in dem auch auf das hier nicht behandelte Problem der Fehlerkorrektur in Quantencomputern eingegangen wird, ist SHORs Vortrag auf dem internationalen Mathematikerkongreß 1998 in Berlin:

PETER W. SHOR: Quantum Computing, *Proceedings of the international congress of mathematicians Berlin 1998, Documenta Mathematica, Extra volume ICM* 1998 · *I,* DEUTSCHE MATHEMATIKER-VEREINIGUNG, 1998, S. 467–486 *oder*
www.mathematik.uni-bielefeld.de/documenta/xvol-icm/00/00.html

§3: DNS-Computer

Alles Leben beruht auf der Informationsverarbeitung in den Zellen eines Organismus. Diese arbeitet mit komplexen chemischen Reaktionszykeln, die bei weitem noch nicht alle verstanden sind. Das wichtigste Speichermedium ist die Desoxyribonucleinsäure, kurz DNS, der Zelle.

Die Informationsdichte dort ist ungeheuer hoch: In trockenem Zustand benötigt ein Bit gerade einmal ein Volumen von $1\,\text{nm}^3$, in der Zelle etwa $100\,\text{nm}^3$. Für einen Kubikzentimeter trockener DNS kommt man somit auf eine Speicherkapazität von 10^{21} Bit, das ist eine achtel Billion Gigabyte; für DNS in der Zelle kommt man mit einem Kubikzentimeter immerhin noch auch 125 Milliarden Gigabyte. In einem Computer faßt ein Speicherriegel der Größe $15\,\text{cm} \times 3\,\text{cm} \times 1\,\text{cm}$ gerade einmal ein halbes Gigabyte, und auch bei CDs braucht man größenordnungsmäßig fast eine Billion Stück, um die in einem Kubikzentimeter DNS enthaltene Information zu speichern.

Hinzu kommt, daß die Information in der DNS massiv parallel verarbeitet werden kann mit einem Energieaufwand pro Operation, der ungefähr zehn Größenordnungen unter dem heutiger Supercomputer liegt.

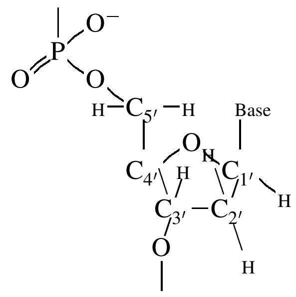
Wenn man dieses Potential für klassische Probleme der wissenschaftlichen oder gewerblichen Informationsverarbeitung nutzbar machen könnte, wäre dies eine Revolution, die auch die Kryptographie massiv verändern würde.

Seit 1994 gibt es einen ersten Hinweis darauf, daß dies vielleicht nicht völlig unrealistisch ist: Damals löste der Mathematiker und Informatiker LEONARD M. ADLEMAN (der hier bereits im Zusammenhang mit dem RSA-Verfahren erwähnt wurde) in einem molekularbiologischen Labor ein (ziemlich einfaches) graphentheoretisches Problem mit Hilfe von DNS.

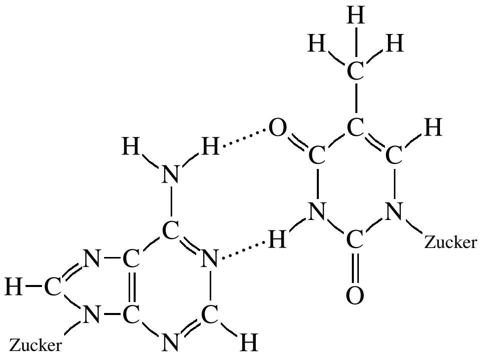
Um seine Vorgehensweise und das Potential der Methode zu verstehen, müssen wir zunächst kurz den Aufbau der DNS betrachten.

a) Die Desoxyribonucleinsäure

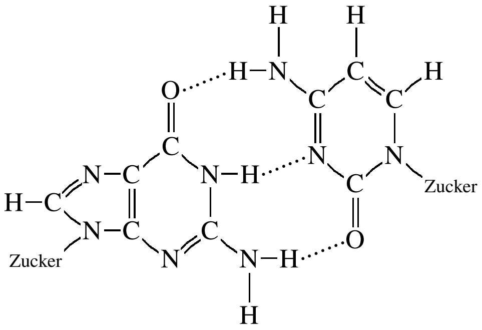
Die Desoxyribonucleinsäure hat ihren Namen vom hier abgebildeten Zuckermolekül Desoxyribose, aus dem ihr Gerüst aufgebaut ist.



Die fünf Kohlenstoffatome werden mit $1'$ bis $5'$ bezeichnet; in der Abbildung ist dies als Index eingetragen. An der Phosphatgruppe von $5'$ und der Hydroxygruppe von $3'$ fehlt jeweils ein Wasserstoffatom: Hier werden die Zucker zu einer Kette zusammengesetzt, wobei stets auf die $5'$-Phosphatgruppe eine $3'$-Hydroxygruppe folgt. Am Kohlenstoffatom $1'$ steht *Base;* hier wird eine jener vier Basen eingebaut, die die eigentlichen Informationsträger der DNS sind: Adenin, Guanin, Thymin und Cytosin.



Adenin Thymin



Guanin Cytosin

Wie man an den Abbildungen sieht, können sich zwischen Adenin und Thymin sowie zwischen Guanin und Cytosin die gestrichelt eingezeichneten Wasserstoffbrücken ausbilden; diese sorgen dafür, daß DNS nur selten in einzelnen Strängen vorkommt: Meist kombinieren sich zwei Stränge zu einem Doppelstrang, wobei jedem Adenin ein Thymin und

jedem Guanin ein Cytosin gegenübersteht. Man bezeichnet diese Basen deshalb als zueinander WATSON-CRICK-komplementär.

Aus geometrischen Gründen hat ein DNS-Doppelstrang die berühmte Form der Doppelhelix, die wiederum selbst weitere geometrische Strukturen bildet. Für die Informationsverarbeitung in der Zelle sind alle diese geometrischen Strukturen sehr wichtig; die entsprechenden Mechanismen sind aber noch nicht so gut verstanden, daß man sie auch in Laborexperimenten ausnutzen könnte, so daß diese Strukturen für uns irrelevant sind.

b) Die Polymerase-Kettenreaktion

Ein wesentlicher Bestandteil des molekularen Rechnens ist der Aufbau von DNS-Sequenzen sowie die Vervielfältigung von Sequenzen mit erwünschten Eigenschaften. Das wichtigste Hilfsmittel dafür ist die 1987 von KARY B. MULLIS entwickelte Polymerase-Kettenreaktion.

Polymerasen sind Enzyme, die in der Zelle die Duplizierung der Information aus DNS-Strängen steuern; sie sind je nach Lebewesen verschieden, und auch innerhalb derselben Zelle gibt es oft mehrere Polymerasen mit verschiedenen Aufgaben. Das besonders gut erforschte Bakterium *Escherichia coli* etwa enthält drei DNS-Polymerasen; die am stärksten vertretene DNS-Polymerase I ist eine Kette mit 928 Aminosäuren. Es handelt sich hier also um sehr komplexe Enzyme, die deshalb auch heute noch nicht synthetisiert werden, sondern auch für die Laborarbeit von Bakterien produziert werden.

Polymerasen werden zusammen mit zwei sogenannten *Primern* eingesetzt, d.h. mit zwei Folgen von DNS-Basen; diese sorgen dafür, daß selektiv ein DNS-Strang produziert wird, der WATSON-CRICK-komplementär ist zum Stück zwischen den beiden Primern auf einem vorhandenen DNS-Strang. Insbesondere muß DNS also einsträngig vorliegen, bevor eine Polymerase aktiv werden kann. In der lebenden Zelle sorgen Enzyme dafür, daß benötigte Teilstränge zur Verfügung stehen; im Labor geht man brutaler vor und teilt den ganzen Doppelstrang durch Erhitzen auf eine Temperatur von 90° − 95° C.

Da diese Temperatur praktisch alle Enzyme zerstört, arbeitet man heute nicht mehr mit der Polymerase von *Escherichia coli,* sondern meist mit der sogenannten Taq-Polymerase des Bakteriums *Thermus aquaticus,* das in heißem Wasser lebt und daher auch eine hitzebeständige Polymerase hat, die ihre optimale katalytische Wirkung bei etwa 75° C entfaltet.

Zur Vervielfältigung von DNS geht man folgendermaßen vor:

Man gibt die DNS zusammen mit den beiden Primern, der Taq-Polymerase und den vier Nucleotiden, aus denen die DNS aufgebaut ist, in ein Gefäß und denaturiert zunächst die DNS durch Erhitzen, d.h. man zerlegt sie in ihre Einzelstränge. Sodann kühlt man ab auf etwa 55° C; dies führt dazu, daß sich die Primer an die passenden Stellen der DNS-Stränge angliedern. Eine Erhöhung der Temperatur auf etwa 75° C aktiviert die Polymerase, die nun dafür sorgt, daß (ausgehend von den $3'$-Enden der Primer) WATSON-CRICK-komplementäre Nucleotide an die DNS-Stränge angelegt werden.

Damit hat man die gewünschten DNS-Sequenzen verdoppelt, was im allgemeinen nicht ausreicht; deshalb wird das Verfahren etwa 25–35 Mal wiederholt, was zu einer etwa millionenfachen Vermehrung führt. Das Verfahren kann in sogenannten Thermocyclern automatisch durchgeführt werden, da es nur auf die zyklische Temperatursteuerung ankommt.

c) Adlemans Experiment

Gegeben seien eine gewisse Anzahl von Städten sowie Straßen, die Städte gewissen anderen Städten verbinden. Man finde eine Straßenverbindung, die eine vorgegebene Stadt mit einem vorgegebenen Ziel so verbindet, daß jede Stadt genau einmal besucht wird.

Dies ist eine von vielen Varianten eines graphentheoretischen Problems, das für große Anzahlen von Städten und Verbindungsstraßen rechnerisch nur mit großem Aufwand gelöst werden kann. (Es ist NP-vollständig.) ADLEMAN beschränkte sich allerdings auf nur sieben Städte und fand heraus, daß der durchschnittliche menschliche Betrachter etwa 54 Sekunden braucht um sein spezielles Problem zu lösen. Interessanter ist

aber die Art und Weise, wie er diese Lösung statt durch Hinschauen durch sieben Tage Arbeit im Labor produzierte.

Die Grundidee ist folgende: Jede Stadt wird durch eine Folge von zwanzig DNS-Basen kodiert; als Lösung soll jene Folge von 140 DNS-Basen produziert werden, die den (in ADLEMANs Beispiel einzigen) Lösungsweg angibt.

Die Herstellung kurzer DNS-Sequenzen mit vorgegebener Basenfolge gehört heutzutage zu den Standardtechniken der Molekularbiologie; große Labors haben Automaten, die solche Sequenzen (über die Polymerase-Kettenreaktion) erzeugen, kleinere kaufen sie von den großen: Für 25$ kann man innerhalb von wenigen Tagen ein Reagenzglas bekommen, das etwa 10^{18} DNS-Stränge mit einer vorgegebenen Folge von zwanzig Basen enthält.

Für jede der sieben Städte wurde also ein solches Reagenzglas benötigt, dazu aber auch noch für jede Straße zwischen zwei Städten. Natürlich müssen die Basenfolgen für Städte und für Straßen aufeinander abgestimmt sein: ADLEMAN faßte die Basenfolge für die i-te Stadt auf als ein Paar (x_i, y_i) aus zwei Basenfolgen der Länge zehn, und wenn es eine Straßenverbindung zwischen i-ter und j-ter Stadt gibt, kodierte er diese durch die Basenfolge $(\overline{y_i}, \overline{x_j})$, wobei die Überstreichung hier für das WATSON-CRICK-Komplement stehen soll.

Der erste Schritt der eigentlichen Berechnung bestand darin, alle diese Sequenzen (jeweils etwa 10^{14} Moleküle) in Wasser aufzulösen und Ligase dazuzugeben. (Ligasen sind Enzyme, die kurze DNS-Sequenzen zu langen zusammenfügen.) Dazu kommt noch etwas Puffer und ähnliches, und ungefähr eine Sekunde später sind im Reagenzglas viele doppelsträngige DNS-Sequenzen zu finden, die möglichen Wegen durch den Graph entsprechen.

Unter diesen Sequenzen sind mit praktisch 100%-iger Sicherheit auch solche, die der Lösung des Problems entsprechen; das Problem besteht genau wie bei den überlagerten Zuständen in Quantencomputern darin, diese herauszufiltern. Ein Vorteil gegenüber Quantencomputern ist allerdings, daß man beim molekularen Rechnen durch Messungen üblicherweise nichts zerstört.

Im zweiten Schritt ging es darum, Sequenzen zu finden, die zu Wegen mit dem Richtigen Anfangs- und Zielort gehören. Finden bedeutete in diesem Fall, daß diese Sequenzen stark vermehrt werden sollten, und das ist ein klarer Fall für die Polymerase-Kettenreaktion: Man nehme die WATSON-CRICK-Komplemente des Start- und des Zielorts als Primer und lasse die Reaktion laufen. Danach sind alle Sequenzen, bei denen Anfangs- und Zielort stimmen, etwa millionenfach verstärkt; die, bei denen nur einer der beiden Orte stimmt, etwa dreißigfach, und der Rest überhaupt nicht. Entnimmt man also eine kleine Probe zur Weiterverarbeitung, so enthält diese kaum noch Sequenzen, bei denen einer der beiden Orte falsch ist.

Im dritten Schritt ging es darum, alle Sequenzen auszusondern, die eine falsche Länge haben. Ein Weg, der jede Stadt genau einmal berührt, entspricht einer Folge von sieben Städten und damit einem DNS-Strang der Länge 140. Zur Isolation dieser Stränge führt eine Art chromatographisches Verfahren, die *Gel-Elektrophorese.*

Hierbei wird ausgenutzt, daß die betrachteten Moleküle negativ geladen sind (man achte auf das O^- in der Desoxyribose). Bringt man die Lösung also auf einen Gel auf, meist Agarose oder Polyacrylamid, und legt ein elektrisches Feld an, so hängt die Wanderungsgeschwindigkeit ab sowohl von der elektrischen Ladung als auch der Molekülgröse und (in geringerem Ausmaß) einigen anderen Gegebenheiten. Die Methode ist aber jedenfalls trennscharf genug, um Sequenzen, deren Länge sich um zwanzig Nucleotide unterscheidet, zuverlässig zu trennen; nachdem die Moleküle einige Zeit gewandert sind, entnimmt man die aus der 140er-Region und verwirft den Rest.

Unter den noch verbleibenden Sequenzen befinden sich immer noch zahlreiche Nichtlösungen, denn eine Folge von sieben Städten erhält man auch, wenn man einige Städte ausläßt und andere dafür mehrfach besucht. Es muß also entweder sichergestellt werden, daß keine Stadt mehrfach besucht wurde, was mit molekularbiologischen Methoden sehr schwer sein dürfte, oder aber, daß jede Stadt mindestens einmal besucht wurde.

Letzteres ist für den Anfangs- und den Zielort bereits bekannt; bleiben

also noch fünf Städte. Für diese verwendete ADLEMAN eine Kombination aus molekularbiologischer und physikalischer Vorgehensweise: Um diejenigen Moleküle auszusondern, die die Sequenz für eine gegebene Stadt nicht enthalten, heftete er WATSON-CRICK-Komplemente dieser Stadt an kleine Eisenkügelchen mit einem Durchmesser von etwa 1 μm, gab dies zu der denaturierten (d.h. wieder durch Erhitzen in Einzelstränge zerlegten) noch verbliebenen Lösung und lies die Stränge sich wieder kombinieren. Dabei paarten sich die Sequenzen an Eisenkugeln mit Teilsequenzen jener Moleküle, die einen Weg durch die betrachtete Stadt beschreiben. Die so entstandenen DNS-Sequenzen waren also mit Eisenkugeln verbunden und konnten so mit einem Magneten am Rand des Reagenzglases festgehalten werden, während der Rest des Glases ausgeschüttet wurde.

Danach wurde frisches Wasser zugegeben und das ganze wieder erhitzt zur Denaturierung; jetzt aber wurde der Magnet an das erhitzte Reagenzglas gehalten, so daß der die Sequenzen mit Eisenkügelchen festhielt. Der Rest wurde umgegossen in ein anderes Reagenzglas, wo dann das gleiche Spiel für die nächste Stadt wiederholt werden konnte, bis alle fünf Städte abgearbeitet waren.

Falls danach noch Moleküle übrig waren, konnte es sich nur um Lösungen handeln. Da es aber wahrscheinlich nur noch relativ wenige waren, vermehrte sie ADLEMAN zunächst durch eine Polymerase-Kettenreaktion und überzeugte sich durch Gel-Elektrophorese davon, daß seine Lösung wirklich Sequenzen der Länge 140 enthielt. Zur vollständigen Lösung des Problems mußten diese dann nur noch analysiert werden.

Auch hierzu dient wieder die Polymerase-Kettenreaktion in Verbindung mit Gel-Elektrophorese: Für jeden Zwischenort führte ADLEMAN eine Polymerase-Kettenreaktion durch, wobei er als Primer die WATSON-CRICK-Komplemente von Anfangsstadt und Zwischenort nahm. Dadurch wurde die Teilsequenz bis zu diesem Zwischenort stark vermehrt, und durch Gel-Elektrophorese läßt sich feststellen, wie lange sie ist. Diese Länge, geteilt durch zwanzig, ist die Position der Stadt im Lösungsweg.

d) Wie geht es weiter?

ADLEMAN hat mit seinem Experiment zwar kein neues Problem gelöst, aber er hat gezeigt, daß molekularbiologische Verfahren zumindest grundsätzlich zur Lösung rechnerischer Probleme benutzt werden können – bis zu ihrem effizienten Einsatz ist es sicherlich noch ein langer Weg.

Das durchgeführte Experiment überprüft mit brutaler Gewalt (fast) *alle* möglichen Wege durch den Graphen, was schon bei 200 Städten eine DNS-Menge verlangen würde, die mehr wiegt als die Erde. Mit klassischen Computern und den besten derzeit bekannten Algorithmen lassen sich dagegen auch Probleme mit einigen Tausend Städten behandeln.

Auch der letzte Schritt des Experiments funktionierte nur deshalb, weil das Problem eine eindeutige Lösung hatte. Dies ist allerdings kein großes Problem, denn alternative Methoden zur Bestimmung der Basenfolge in einem DNS-Strang gibt es natürlich: Schließlich wurde inzwischen sogar das gesamte menschliche Genom entschlüsselt.

Um ein Gefühl für die mögliche Relevanz des molekularen Rechnens in der Zukunft zu bekommen, insbesondere auch in Bezug auf die Kryptologie, ist es vielleicht ganz nützlich, zum Vergleich ein völlig anderes Thema zu betrachten, die bisherige Geschichte der Faktorisierung ganzer Zahlen.

Das einfachste Verfahren zur Faktorisierung einer ganzen Zahl N ist das systematische Durchprobieren aller Zahlen $d \leq \sqrt{N}$; dieser Algorithmus ist vergleichbar mit ADLEMANs oben beschriebener Methode.

Wie wir bei der Diskussion von SHORs Algorithmus gesehen haben, liefert der Ansatz von FERMAT ein alternatives Verfahren; berechnet man, wie es FERMAT tat, für $a = 1, 2, 3, \ldots$ systematisch die Zahlen $N + a^2$ in der Hoffnung, darunter ein Quadrat zu finden, so lassen sich zumindest Zahlen mit zwei nahe beieinanderliegenden Faktoren deutlich schneller zerlegen.

Das neunzehnte Jahrhundert war von der Mechanisierung geprägt; in der ersten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts erreichte diese auch die

Zahlentheorie, als D.H. LEHMER eine Siebversion der FERMAT-Methode mit Zahnrädern und Fahrradketten zur Faktorisierung verwendete.

Bei den elektrischen und elektronischen Rechner griff die neue Technik schneller auf die Zahlentheorie über: D.H. LEHMER hatte bereits auf den ersten Computern seiner Universität Hintergrundprogramme laufen, die sich mit der Faktorisierung von Zahlen beschäftigten, wenn es sonst nichts zu tun gab.

In den Siebzigerjahren, als Computer leistungsfähig genug waren, um in Zahlbereiche vorzudringen, die vorher jenseits praktisch durchführbarer Rechnungen lagen, war wieder die Mathematik gefragt, die in den letzten dreißig Jahren immer neue Faktorisierungsalgorithmen entwickelte. Diese mußten auf den jeweils aktuellen Computern implementiert werden, wobei in den Achtzigerjahren vor allem die CRAY-Computer eine sehr große Rolle spielten und aufgrund ihrer Pipeline-Architektur zur Entwicklung und Optimierung neuer Programmiertechniken zwangen.

In den Neunzigerjahren brachte das Internet die Möglichkeit zum verteilten Rechnen; 1994 wurde dadurch jene berühmte 129-stellige Zahl faktorisiert, die 1978 bei der Vorstellung des RSA-Systems als Beispiel diente und von der man damals überzeugt war, daß sie auch in hundert Jahren noch sicher sei. (Heute hält das Bundesamt für Sicherheit in der Informationstechnik Zahlen mit mindestens 1024 Bit für sicher; ab 2005 verlangt es die doppelte Länge.)

Für Fortschritte bei der Faktorisierung waren also jeweils drei Aspekte maßgeblich:

- Bessere mathematische Algorithmen
- Bessere Maschinen
- Besseres Verständnis des Umgangs mit diesen Maschinen.

Auch die weitere Entwicklung des molekularen Rechnens wird wohl von drei ähnlichen Aspekten abhängen.

Sechs Jahre nach ADLEMANs Experiment kann man versuchen, zumindest ein bißchen über jeden dieser drei Aspekte zu spekulieren.

Die weitaus größte Zahl von Publikationen im Umkreis der DNS-Computer beschäftigt sich mit theoretischen Algorithmen sowie mit abstrakten Maschinen und formalen Sprachen zur Modellierung des molekularen Rechnens. Viele dieser Arbeiten kommen von theoretischen Informatikern ohne Chemieausbildung und dürften wohl selbst innerhalb der Informatik schon in wenigen Jahren vergessen sein; bis zu einer Erprobung im Labor dürften es kurzfristig auch vom verbleibenden Rest kaum eines bringen. Langfristig allerdings könnten einige wenige dieser Ansätze durchaus zu brauchbaren Verfahren weiterentwickelt werden.

Von besseren *Maschinen* dürfte der Fortschritt des molekularen Rechnens angesichts der hochentwickelten verfügbaren chemischen Labortechnik in den nächsten Jahren wohl kaum abhängen; vielmehr geht es darum, zunächst zu erforschen, welche primitiven Grundoperationen wie durchgeführt werden können, um effizient molekular zu rechnen. Mit dieser Frage beschäftigen sich eine ganze Reihe molekularbiologischer Laboratorien, die beispielsweise mit an Oberflächen angehefteten Molekülen und ähnlichem arbeiten und teilweise auch schon erste Erfolge melden können: So gelang inzwischen die molekulare Addition zweier (kleiner) Binärzahlen. Im Augenblick ist noch nicht abzusehen, ob sich mehrere Grundparadigmen durchsetzen werden, oder ob die Entwicklung auf *den* DNS-Computer zusteuert.

Der dritte Aspekt, der bessere Umgang mit der Maschinerie, kann wohl erst dann zum Tragen kommen, wenn die Entwicklungen beim Algorithmenentwurf und bei den molekularbiologischen Ansätzen anfangen, gegeneinander zu konvergieren, wenn also die entsprechenden Experten anfangen, Notiz voneinander zu nehmen. Dies setzt einerseits voraus, daß die Labors stabile und zuverlässige Verfahren entwickeln. Vor allem aber wird ein wirklicher Fortschritt erst dann möglich sein, wenn es eine nennenswerte Anzahl von Wissenschaftlern gibt, die sowohl in der Molekularbiologie als auch in der Algorithmik zumindest eine gewisse Mindestqualifikation haben.

Der Zeitrahmen dafür hängt wesentlich davon ab, ob es gelingt, ausreichend Studenten für eine solche duale Qualifikation zu begeistern und sie ihnen auch zu ermöglichen, oder ob die Studenten angesichts des Booms sowohl in der Informationstechnik als auch der Molekularbiologie vollauf mit der Qualifikation in einem dieser Gebiete zufrieden sind.

An diesem Punkt geraten die Spekulationen ins Gebiet der Politik, wo

Spekulationen nur selten zu etwas vernünftigem führen; daher soll diese Vorlesung besser hier enden.

e) Literaturhinweise

Die Originalarbeit von Adleman ist

Leonard M. Adleman: Molecular computation of solutions to combinatorial problems, *Science* **266** (1994), S. 1021–1024

Eine erste Diskussion, bestehend aus mehreren Leserbriefen und einer Antwort Adlemans ist in *Science* **268** (1995), S. 481–484 zu finden. Eine gut lesbare Darstellung der wesentlichen Punkte des Experiments ist

Leonard M. Adleman: Rechnen mit DNA, *Spektrum der Wissenschaft,* November 1998, S. 70–77

Einen Überblick über die weitere Entwicklung geben beispielsweise die Tagungsbände *DNA Based Computers* I-V; die ersten drei wurden von der American Mathematical Society als Bände 27 (1996), 44 und 48 (beide 1999) der *Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* veröffentlicht, die beiden weiteren habe ich noch nicht im Druck gesehen. Ein ähnlicher Tagungsband ist

Gheorghe Răun [Hrsg:] *Computing with bio-molecules,* Springer, 1998

Eine Übersicht über die molekularbiologischen Methoden, die dem molekularen Rechnen zugrunde liegen, findet man beispielsweise in den Büchern

Bernard L. Glick, Jack J. Pasternak: *Molekulare Biotechnologie,* Spektrum Akademischer Verlag, 1995 *und*

Rolf Knippers: *Molekulare Genetik,* Thieme, ^{7}1997,

von denen das erste mit etwas anschaulicheren Darstellungen arbeitet und das zweite stärker auf den biochemischen Hintergrund eingeht. Detailierte Laboranweisungen zu den Grundtechniken findet man etwa in

Hans Günther Gassen, Gangolf Schrimpf [Hrsg.]: *Gentechnische Methoden,* Spektrum Akademischer Verlag, ^{2}1999