Wolfgang K. Seiler

Höhere Mathematik II

Vorlesung an der Universität Mannheim
im Wintersemester 2003/2004

Dieses Skriptum entsteht parallel zur Vorlesung und soll mit möglichst geringer Verzögerung verteilt werden. Es ist in seiner Qualität auf keinen Fall mit einem Lehrbuch zu vergleichen; insbesondere sind Fehler bei dieser Entstehensweise nicht nur möglich, sondern **sicher**. Dabei handelt es sich sicherlich nicht immer nur um harmlose Tippfehler, sondern auch um Fehler bei den mathematischen Aussagen.

Das Skriptum sollte daher mit Sorgfalt und einem gewissen Mißtrauen gegen seinen Inhalt gelesen werden; falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir dies bitte persönlich oder per e-mail (seiler@math.uni-mannheim.de) mit, oder informieren Sie Ihren Tutor. Auch wenn Sie Teile des Skriptums unverständlich finden, bin ich für entsprechende Hinweise dankbar.

Falls genügend viele Hinweise eingehen, werde ich von Zeit zu Zeit Berichtigungen und Verbesserungen ausgeben.

Kapitel 3
Harmonische Analyse und Integraltransformationen

Das bekannteste Beispiel zum Thema dieses Kapitels liefert die Musik: Dieselbe Note „g“, gespielt auf verschiedenen Instrumenten, hat jeweils ihren eigenen unverwechselbaren Klang, und selbst der Unmusikalischste wird wohl kaum den Klang einer Geige mit dem einer Trompete verwechseln können. Der Grund dafür dürfte allgemein bekannt sein: Die verschiedenen Musikinstrumente produzieren zum selben Grundton verschiedene Obertöne. Anhand der Verhältnisse zwischen den Stärken dieser Obertöne (und auch deren zeitlicher Variation) identifiziert unser Ohr die uns vertrauten Instrumente – auch wenn uns diese Verhältnisse quantitativ nicht bewußt sind.

Genau wie unser Ohr reagieren auch elektrische Schaltungen in unterschiedlicher Weise auf verschiedene Frequenzen: Legt man beispielsweise an eine Spule mit OHMschem Widerstand R und Induktivität L eine Gleichspannung U_0 an, so fließt ein Strom der Stärke I_0, für den nach dem OHMschen Gesetz gilt: $U_0 = RI_0$. Ersetzt man aber die Gleichspannung durch eine Wechselspannung der Kreisfrequenz ω, so gilt für die Amplitude I_0 des dann fließenden Wechselstroms $U_0 = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\, I_0$, der Widerstand hängt also ab von der Frequenz.

Ersetzt man die Spule durch einen Kondensator mit Kapazität C und Widerstand (der Zuleitungen) R, so fließt beim Anlegen einer Gleichspannung natürlich überhaupt kein Strom: Der Kondensator lädt sich einfach auf. Legt man aber eine Wechselspannung der Kreisfrequenz ω

an, fließt ein Strom der Amplitude

$$I_0 = U_0 \Big/ \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\ ;$$

auch hier haben wir also wieder einen von der Frequenz abhängigen Widerstand.

Wechselstromkreise haben zwar mehr mit Technischer Informatik zu tun als Geigen und Trompeten; sie gehören aber doch eher zum Arbeitsgebiet eines Elektroinstallateurs als zu dem eines Informatikers. In einem Computer fließen zwar Ströme, aber mit reinen Wechselströmen kann man fast genauso wenig anfangen wie mit einem Computer, in dem überall ein konstanter Gleichstrom fließt: Elektronische Informationsverarbeitung lebt von schnell und unregelmäßig variierenden Strömen. Diese fließen allerdings durch genau die Schaltungen, von denen wir gerade gesehen haben, daß ihr Verhalten stark von der Frequenz abhängt.

Um auch solche Situationen berechenbar zu machen, müssen wir einen beliebigen Stromverlauf in eine *Summe reiner Wechselströme* zerlegen, so wie man auch den Ton eines Musikinstruments in seine Grundschwingung und die Oberschwingungen zerlegen kann. Wir werden in diesem Kapitel als erstes sehen, daß man jede (halbwegs vernünftige) *periodische* Funktion beliebig genau durch Summen reiner Schwingungen annähern kann; die entsprechende Konstruktion bezeichnet man als *harmonische Analyse.* Diese gestattet es, auch für komplizierte Signale deren Verhalten in einer (linearen) Schaltung zu berechnen: Wir müssen einfach jede der reinen Schwingungen, aus denen es zusammengesetzt ist, für sich betrachten und die Ergebnisse aufsummieren.

Für nichtperiodische Funktionen wird sich zeigen, daß hier zwar keine Zerlegung in diskrete Grund- und Oberschwingungen mehr möglich ist, daß es aber ein *kontinuierliches Frequenzspektrum* gibt, mit dem man genauso arbeiten kann, wenn man die Beiträge der einzelnen Frequenzen nicht mehr summiert, sondern aufintegriert.

Bevor wir uns mit diesen Zerlegungen beschäftigen, brauchen wir aber zunächst einige Vorbereitungen über komplexe Funktionen.

§1: Funktionen einer komplexen Veränderlichen

a) Wozu komplexe Zahlen

Funktionen einer Verändlerlichen werden in der Technik typischerweise dazu eingesetzt, um die Zeitabhängigkeit physikalischer Größen auszudrücken: So kann beispielsweise ein Wechselstrom der Amplitude I_0 und der Kreisfrequenz ω durch die Gleichung $I(t) = I_0 \sin \omega t$ beschrieben werden. Schaut man allerdings in Lehrbücher der Elektrotechnik, so findet man dort oft stattdessen die Formel

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t}\,.$$

(Tatsächlich schreiben Elektrotechniker natürlich $e^{j\omega t}$, denn im Gegensatz zu Mathematikern und Physikern bezeichnen sie $\sqrt{-1}$ nicht mit i, sondern mit j.)

Auf den ersten Blick erscheint dies unsinnig: Was soll man sich beispielsweise unter einem Strom von $4 - 2i$ Milliampère vorstellen? Einen solchen Strom gibt es natürlich nicht. Tatsächlich ist die obige Gleichung so zu interpretieren, daß ihr Imaginärteil den tatsächlichen Strom beschreibt, während der Realteil ignoriert wird. Auf Grund der EULERschen Formeln

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t, \quad \cos \omega t = \mathfrak{Re}\, e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad \sin \omega t = \mathfrak{Im}\, e^{i\omega t}$$

ist also auch bei dieser Schreibweise der tatsächlich fließende Strom gleich $I_0 \sin \omega t$. (Einige Bücher verwenden auch die Konvention, daß nur der Realteil zählt und der Imaginärteil ignoriert wird; in diesem Fall würde die Gleichung den Strom $I_0 \cos \omega t$ beschreiben.)

Der Sinn dieser Vorgehensweise liegt in mindestens zwei rechnerischen Vorteilen: Zunächst einmal sind Additionsregeln für trigonometrische Funktionen, vor allem wenn man sie mehrfach anwenden muß, ziemlich unangenehm, wohingegen wir für die Exponentialfunktion, egal ob mit reellen oder komplexen Argumenten, einfach die Regel $e^{x+y} = e^x e^y$ anwenden können.

Der zweite Vorteil wird offensichtlich, wenn wir Wechselstromnetzwerke betrachten, die nicht nur Widerstände, sondern auch Spulen und

Kondensatoren enthalten: Geht ein variabler Strom durch eine Spule der Induktivität L, so wird die Spannung $U(t) = L\dot{I}(t)$ induziert. In reeller Beschreibung ist also bei einem Wechselstrom $I(t) = I_0 \sin \omega t$

$$U(t) = L\omega \cos \omega t\,.$$

Beim komplexen Ansatz $I(t) = I_0 e^{i\omega t} = I_0\big(\cos \omega t + i \sin \omega t\big)$ ist dagegen

$$\begin{aligned} U(t) &= LI_0\big(-\omega \sin \omega t + i\omega \cos \omega t\big) \\ &= i\omega L \cdot I_0\big(\cos \omega t + i \sin \omega t\big) = i\omega L \cdot I_0 e^{i\omega t} = i\omega L \cdot I(t)\,, \end{aligned}$$

was als Imaginärteil natürlich genau den gerade berechneten reellen Ausdruck hat.

Im Komplexen wird $I(t)$ also einfach mit $i\omega L$ multipliziert, wohingegen im Reellen die Amplitude mit L multipliziert wird und zusätzlich noch der Sinus durch einen Kosinus ersetzt werden muß. Während wir im Reellen also stets auch die Zeitabhängigkeit der Stromstärke im Auge behalten müssen, reicht es bei komplexer Darstellung, einfach die Amplituden zu betrachten.

Ähnlich ist es bei Kondensatoren: Hier fließt bei Kapazität C und Ladung $Q(t)$ des Kondensators der Strom $I(t) = \dot{Q}(t)$; falls dies ein reiner Wechselsstrom ist, können wir ihn als $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$ schreiben, und die Spannung zwischen den beiden Platten des Kondensators ist

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{Q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int I(t)\,dt = \frac{1}{C}\int I_0 e^{i\omega t}\,dt = \frac{1}{i\omega C}\cdot I_0 e^{i\omega t} \\ &= \frac{1}{i\omega C}\cdot I(t)\,. \end{aligned}$$

Rein formal kann man also im komplexen Kalkül, der sogenannten *komplexen Zeigerrechnung*, Induktivitäten und Kapazitäten als rein imaginäre „Widerstände“ hinschreiben und mit diesen genauso rechnen, wie man es bei Gleichstromnetzen mit nur OHMschen Widerständen gewohnt ist. Zusammen mit den auch in Wechselstromnetzen allgegenwärtigen OHMsche Widerständen, für die das klassische OHMsche Gesetz gilt, hat man somit insgesamt formal einen komplexen Widerstand, die sogenannte *Impedanz.*

Die KIRCHHOFFschen Gesetze gelten auch für die komplexe Beschreibung von Strömen und Spannungen, insbesondere gelten für die Parallel- und Serienschaltung von Impedanzen genau die Regeln, die man von den OHMschen Widerständen her gewohnt ist, und man kann Ströme und Spannungen in Wechselstromnetzwerken mit nur passiven Bauelementen genauso berechnen wie bei Gleichstromnetzwerken, die nur Widerstände enthalten. Der einzige Unterschied besteht darin, daß man nun lineare Gleichungssysteme mit *komplexen* Koeffizienten lösen muß.

Bei einer rein reellen Beschreibung müßte man statt dessen Differentialgleichungssysteme betrachten, was – wie wir im vierten Kapitel sehen werden – erheblich aufwendiger ist. (Bei kompliziertenen Schaltungen, die auch aktive Bauteile enthalten, gibt es dazu allerdings keine Alternative mehr.)

Auch die eingangs erwähnten Formeln für die Spannungsamplituden in einem RL- *bzw.* RC-Kreis lassen sich durch komplexe Zeigerrechnung leicht erklären: Im RL-Kreis ist die Impedanz gleich $R + i\omega L$; bei einem Wechselstrom $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$ ist die Spannung also in komplexer Darstellung $U(t) = (R+i\omega L)\cdot I_0 e^{i\omega t}$. Da e^{ix} für reelles x stets Betrag eins hat, ist der Betrag von $U(t)$ gleich dem der komplexen Zahl $(R+i\omega L)I_0$, also $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\, I_0$.

Warum ist dieser Betrag gleich der Amplitude des Imaginärteils? Für die Funktion $Ae^{i\omega t}$ mit komplexem A (hier ist $A = (R + i\omega L)\cdot I_0$), können wir A auch in Polarkoordinaten schreiben als $A = |A|\cdot e^{i\psi_0}$. Dann ist

$$Ae^{i\omega t} = |A|\cdot e^{i(\omega t+\psi)} = |A|\cdot \big(\cos(\omega t + \psi) + i\sin(\omega t + \psi)\big)\,,$$

der Imaginärteil hat also in der Tat Amplitude $|A|$. Bei reeller Rechnung kämen wir zwar zum selben Ergebnis, aber wir müßten in diesem Fall die Amplitude der Funktion

$$\omega L I_0 \cos\omega t + R I_0 \sin\omega t$$

berechnen. Dazu müßten wir diesen Ausdruck auf die Form

$$A_0 \sin(\omega t + \psi) = A_0 \sin\psi\, \cos\omega t + A_0 \cos\psi\, \sin\omega t$$

bringen, d.h. wir müßten eine Phasenverschiebung ψ und eine Amplitude A_0 finden, so daß

$$\omega L I_0 = A_0 \sin\psi \quad \text{und} \quad R I_0 = A_0 \cos\psi$$

ist. Wegen der Beziehung $\sin^2\psi + \cos^2\psi = 1$ ist natürlich auch hier

$$A_0 = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\, I_0\,,$$

aber man erhält dieses Ergebnis auf deutlich umständlichere Weise.

Auf Grund dieser vielen Vorteile hat sich die komplexe Zeigerrechnung allgemein durchgesetzt; ihre einfache Handhabbarkeit wiegt den Nachteil des zunächst etwas unanschaulichen Ansatzes mehr als auf, und im übrigen gewöhnt man sich nach etwas praktischer Übung auch sehr schnell daran.

Auch in der Wellenoptik erweist es sich oft als große Vereinfachung und Arbeitsersparnis, wenn man mit komplexen Schwingungen rechnet. Wir werden daher in diesem Kapitel nicht nur reelle, sondern auch komplexe Funktionen betrachten. Da wir viel differenzieren und integrieren müssen, wollen uns zunächst überlegen, was diese Operationen im Komplexen bedeuten und welche Gesetze dafür gelten.

Wer immer noch Probleme darin sieht, mit komplexen Größen zu rechnen, die keinerlei physikalische Realität haben, sollte sich daran erinnern, daß auch die reellen Zahlen eine mathematische Konstruktion ohne Entsprechung in der Realität sind. Die Erfahrung in Naturwissenschaften, Ingenieurwissenschaften, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften haben gezeigt, daß die reellen Zahlen dort außerordentlich nützlich sein können, einen logischen Grund dafür gibt es aber nicht. Der Physik-Nobelpreisträger EUGENE WIGNER (1902–1995) bezeichnete dies im Titel einer seiner Arbeiten als „The unreasobable effectiveness of mathematics in the natural sciences“ *(Communications in pure and applied mathematics* **13** (1960), *1–14; zahlreiche Nachdrucke im WWW).* Wirklich zum Tragen kommt diese schwer erklärbare Nützlichkeit der Mathematik allerdings nur in den Händen eines Anwenders, der sowohl ihre Möglichkeiten als auch ihre Grenzen für seinen jeweiligen Problembereich kennt.

b) Holomorphe Funktionen

Um möglichst schnell zu Ergebnissen zu kommen, identifizieren wir die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$ mit der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$, indem wir den

Punkt $x + iy \in \mathbb{C}$ (meist stillschweigend) mit dem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ identifizieren. Eine Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entspricht damit einem Vektorfeld $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Dafür können wir die Ergebnisse aus dem letzten Kapitel anwenden, allerdings liefern uns diese noch nicht alles, was wir brauchen: Die Ableitung $f'(z)$ im Punkt $z \in \mathbb{C}$ soll natürlich eine komplexe Zahl sein; die Ableitung eines Vektorfelds aber ist die reelle JACOBI-Matrix. In der Tat wird sich herausstellen, daß die komplexe Differenzierbarkeit von f eine sehr viel einschneidendere Forderung ist als die Differenzierbarkeit des entsprechenden Vektorfelds; sie hat es daher verdient, daß wir dafür auch ein neues Wort einführen:

Definition: Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ auf der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar* im Punkt $z \in D$, wenn der Grenzwert

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existiert und stetig ist. f heißt *komplex differenzierbar in* D, wenn f in jedem Punkt $z \in D$ komplex differenzierbar ist. f heißt *holomorph* in D, wenn zusätzlich $f'\colon D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ist.

Der große Unterschied zum reellen Differentialquotienten liegt darin, daß h hier eine *komplexe* Zahl ist, die sich nicht nur von rechts und links, sondern aus allen Richtungen und auf jedem beliebigen Weg (für den $z + h$ noch in D liegt) dem Nullpunkt nähern kann. Um zu sehen, was das bedeutet, betrachten wir zunächst die beiden einfachsten Fälle, daß sich h ganz auf der reellen *bzw.* der imaginären Achse bewegt.

Konkret sei $z = x + iy$ und

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

mit zwei Funktionen $u, v\colon D \to \mathbb{R}$. (Hier wird D also als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ aufgefaßt.)

Für *reelles* h ist dann

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i\frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} ;$$

der Grenzwert für h gegen Null, so er existiert, ist damit gleich

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) .$$

Für rein *imaginäres* $h = ik$ ist entsprechend

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{ik} + i\frac{v(x, y+k) - v(x, y)}{ik} = \frac{v(x, y+k) - v(x, y)}{k} - \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{k} ;$$

der Grenzwert für h (oder k) gegen Null ist also, so er existiert, gleich

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) .$$

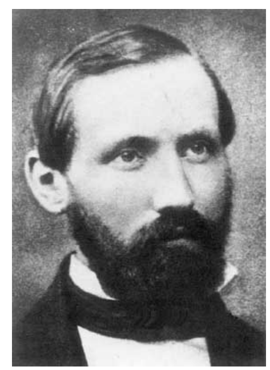
Falls f komplex differenzierbar ist, müssen beide Grenzwerte übereinstimmen, d.h.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

oder kurz

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad v_x = -u_y .$$

Diese Gleichungen heißen CAUCHY-RIEMANNsche Differentialgleichungen; sie sind eine notwendige Bedingung dafür, daß eine Funktion komplex differenzierbar ist.



GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANNN (1826-1866) war Sohn eines lutherischen Pastors und schrieb sich 1946 auf Anraten seines Vaters an der Universität Göttingen für das Studium der Theologie ein. Schon bald wechselte an die Philosophische Fakultät, um dort unter anderem bei GAUSS Mathematikvorlesungen zu hören. Nach Promotion 1851 und Habilitation 1854 erhielt er dort 1857 einen Lehrstuhl. Trotz seines frühen Todes initiierte er grundlegende auch noch heute fundamentale Entwicklungen in der Geometrie, der Zahlentheorie und über abelsche Funktionen. Seine Vermutung über die Nullstellen der (heute als RIEMANNsch bezeichneten) ζ-Funktion ist die berühmteste offene Vermutung der heutigen Mathematik.

AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789–1857) kennen wir bereits von der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung.

Es ist nicht ganz so offensichtlich ist, daß die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen sogar *hinreichend* sind. Um das einzusehen, fassen wir $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen reellen Vektorraum auf und betrachten für jede komplexe Zahl $c = a + ib$ die lineare Abbildung

$$\varphi_c\colon \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto cz \end{cases} .$$

Da sie 1 auf $a + ib$ und i auf $-b + ia$ abbildet, hat sie bezüglich der $\mathbb{R}$-Basis $\{1, i\}$ von $\mathbb{C}$ die Abbildungsmatrix

$$M_c = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} ,$$

und umgekehrt entspricht jede lineare Abbildung mit einer Matrix dieser Form der Multiplikation mit einer komplexen Zahl.

Betrachten wir nun die komplexe Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ als Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, so ist

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} ,$$

und für dieses Vektorfeld gilt, sofern es differenzierbar ist,

$$f(x + k, y + \ell) = f(x, y) + J_f(x, y) \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} + o\left(\sqrt{k^2 + \ell^2}\right)$$

mit der JACOBI-Matrix

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} u_x(x, y) & u_y(x, y) \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{pmatrix} .$$

Diese Matrix ist genau dann von obiger Gestalt, wenn die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \quad \text{und} \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y)$$

erfüllt sind; in diesem Fall gilt für die komplexe Zahl

$$w = u_x(x, y) + iu_y(x, y) = v_y(x, y) - iv_x(x, y) ,$$

daß $J_f(x, y) \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix}$ als komplexe Zahl aufgefaßt gleich $w \cdot (k + i\ell)$ ist. Alsdann läßt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u(x + k, y + \ell) \\ v(x + k, y + \ell) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} + J_f(x, y) \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} + o\left(\left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\| \right)$$

mit $h = k + i\ell$ auch komplex schreiben als

$$f(z + h) = f(z) + wh + o(h) ,$$

denn der Betrag der komplexen Zahl $h = k+i\ell$ ist gleich $\sqrt{k^2 + \ell^2}$ und damit gleich der Länge des Vektors $\binom{k}{\ell}$. Wenn die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen erfüllt sind, ist f daher im Punkt z komplex differenzierbar mit Ableitung $f'(z) = w$.

Damit haben wir gezeigt

Satz: Die Funktion $f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$ ist genau dann komplex differenzierbar im Punkt $x + iy$, wenn dort die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \quad \text{und} \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y)$$

gelten. ■

c) Beispiele holomorpher Funktionen

Um ein Gefühl für Holomorphie zu bekommen, wollen uns überlegen, welche der gängigen Funktionen holomorph sind und welche nicht.

Mit am einfachsten sind die Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^n$. Diese lassen sich allerdings nur umständlich in Realteil und Imaginärteil zerlegen – was im übrigen auch der Grund ist, warum eine Formel wie $e^{10it} = \left(e^{it}\right)^{10}$ soviel einfacher ist als

$$\cos 10t = 512 \cos^{10} t - 1280 \cos^8 t + 1120 \cos^6 t - 400 \cos^4 t + 50 \cos^2 t - 1$$

und warum komplexe Funktionen für uns attraktiv sind.

Zumindest in diesem Fall ist es daher einfacher, die komplexe Differenzierbarkeit direkt nachzurechnen; die Rechnung ist identisch mit der aus Schule und Analysis I bekannten Rechnung im Reellen: Für beliebige Zahlen $z, h \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist nach der binomischen Formel

$$\begin{aligned} (z + h)^n - z^n &= z^n + nhz^{n-1} + \binom{n}{2} h^2 z^{n-2} + \cdots + h^n - z^n \\ &= h \left(nz^{n-1} + \binom{n}{2} hz^{n-2} + \cdots + h^{n-1} \right) \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} = nz^{n-1} + \binom{n}{2} hz^{n-2} + \cdots + h^{n-1} .$$

Läßt man rechts h gegen Null gehen, verschwinden alle Terme außer dem ersten, d.h. auch im Komplexen ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = nz^{n-1} ,$$

und da dies eine stetige Funktion ist, sind zumindest Potenzen holomorph. Damit definieren auch alle komplexen Polynome holomorphe Funktionen und haben ihre gewohnten Ableitungen, denn auch im Komplexen ist Differentiation eine lineare Operation.

Die nächste extrem wichtige Funktion ist die Exponentialfunktion. Auch hier könnten wir direkt rechnen, wollen aber zur Abwechslung die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen anwenden: Nach den EULERschen Formeln ist

$$e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y ,$$

für $f(z) = e^z$ ist also $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit

$$u(x,y) = e^x \cos y \quad \text{und} \quad v(x,y) = e^x \sin y .$$

Damit ist

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) = e^x \cos y \;\text{ und }\; v_x(x,y) = -u_y(x,y) = e^x \sin y ,$$

die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen sind also erfüllt. Die Ableitung kann z.B. über die Differenzenquotienten mit reellem h berechnet werden; für $z = x + iy$ ist

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x e^{iy} = e^z ,$$

wie gewohnt. Insbesondere ist die Ableitung stetig, die Exponentialfunktion also holomorph.

Auch die Ableitung von $f(z) = e^{\omega z}$ für $\omega = \lambda + i\mu \in \mathbb{C}$ bringt keine Überraschungen:

$$f(x+iy) = e^{(\lambda+i\mu)(x+iy)} = e^{\lambda x-\mu y} e^{i(\lambda y+\mu x)} = u(x,y) + iv(x,y)$$

mit

$$u(x,y) = e^{\lambda x-\mu y} \cos(\lambda y + \mu x) \quad \text{und} \quad v(x,y) = e^{\lambda x-\mu y} \sin(\lambda y + \mu x) ,$$

d.h.

$$\begin{aligned} u_x(x,y) = v_y(x,y) &= \lambda e^{\lambda x-\mu y} \cos(\lambda y + \mu x) - \mu e^{\lambda x-\mu y} \sin(\lambda y + \mu x) \\ &= e^{\lambda x-\mu y} \big(\lambda \cos(\lambda y + \mu x) - \mu \sin(\lambda y + \mu x)\big) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} v_x(x,y) = -u_y(x,y) &= \lambda e^{\lambda x-\mu y} \sin(\lambda y + \mu x) + \mu e^{\lambda x-\mu y} \cos(\lambda y + \mu x) \\ &= e^{\lambda x-\mu y} \big((\lambda \sin(\lambda y + \mu x) + \mu \cos(\lambda y + \mu x)\big) . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir auch hier das erwartete Ergebnis

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x(x,y) + iv_x(x,y) \\ &= e^{\lambda x-\mu y} \big((\lambda + i\mu) \cos(\lambda y + \mu x) + (-\mu + i\lambda) \sin(\lambda y + \mu x)\big) \\ &= e^{\lambda x-\mu y} \big((\lambda + i\mu) \cos(\lambda y + \mu x) + i(\lambda + i\mu) \sin(\lambda y + \mu x)\big) \\ &= e^{\lambda x-\mu y} (\mu + i\lambda)\big(\cos(\lambda y + \mu x) + i \sin(\lambda y + \mu x)\big) \\ &= \omega e^{\lambda x-\mu y} e^{i(\lambda y+\mu x)} = \omega e^{\omega z} . \end{aligned}$$

Wenn wir die EULERschen Formeln

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{und} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

als Definition für komplexwertige trigonometrische Funktionen nehmen, folgt aus der Linearität der Ableitung, daß auch diese Funktionen holomorph sind mit

$$\frac{d}{dz} \cos \omega z = -\omega \sin \omega z \quad \text{und} \quad \frac{d}{dz} \sin \omega z = \omega \cos \omega z .$$

Schließlich gilt auch die Produktregel genau wie im Reellen: Sind $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen, so ist für $z, z+h \in D$

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(z+h) - (fg)(z)}{h} &= \frac{f(z+h)g(z+h) - f(z)g(z)}{h} \\ &= \frac{f(z+h)\big(g(z+h) - g(z)\big) + \big(f(z+h) - f(z)\big)g(z)}{h} \\ &= f(z+h)\, \frac{g(z+h) - g(z)}{h} + \frac{f(z+h) - f(z)}{h}\, g(z) , \end{aligned}$$

was für $h \to 0$ gegen $f(z)g'(z) + f'(z)g(z)$ konvergiert. Damit ist auch das Produkt zweier holomorpher Funktionen holomorph, und wie im Reellen gilt die LEIBNIZ-Regel

$$(fg)' = fg' + f'g\,.$$

Auch die zweite wichtige Differentiationsregel, die Kettenregel, folgt genau wie im Reellen: Für eine holomorphe Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ und eine weitere holomorphe Funktion $g\colon D \to U$ mit $U \subseteq \mathbb{C}$ offen ist zunächst wegen der Holomorphie von g für alle $z \in D$

$$g(z+h) = g(z) + hg'(z) + o(h)\,,$$

also folgt aus der Holomorphie von f, daß

$$f\big(g(z+h)\big) = f\big(g(z)+hg'(z)+o(h)\big) = f\big(g(z)\big) + hg'(z)f'\big(g(z)\big) + o(h)$$

ist, und

$$\frac{f\big(g(z+h)\big) - f\big(g(z)\big)}{h} = g'(z)\,f'\big(g(z)\big) + \frac{o(h)}{h}$$

konvergiert für $h \to 0$ gegen $g'(z)\,f'\big(g(z)\big) = f'\big(g(z)\big)g'(z)$. Also ist auch $f\big(g(z)\big)$ eine holomorphe Funktion, und wie im Reellen ist

$$\frac{d}{dz} f\big(g(z)\big) = f'\big(g(z)\big)g'(z)\,.$$

Um zu sehen, daß es auch keine Probleme mit von Null verschiedenen Quotienten gibt, müssen wir daher nur noch die eine Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \\ \qquad z \mapsto \dfrac{1}{z} \end{cases}$$

betrachten. Hier ist

$$f(x+iy) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\,,$$

also

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,.$$

Somit ist

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{und} \quad v_x = -u_y = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

also

$$f'(z) = \frac{y^2-x^2+2ixy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-(x-iy)^2}{\big((x+iy)(x-iy)\big)^2} = \frac{-1}{(x+iy)^2} = \frac{-1}{z^2}\,.$$

Insbesondere wissen wir damit, daß alle Funktionen holomorph sind, die durch Grundrechenarten und Hintereinanderausführung aus Potenzen, Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen zusammengesetzt werden können – sofern bei den Divisionen keine Nullen im Nenner auftauchen.

Beispielsweise ist also

$$f(z) = \sin z \cdot e^{2z^2+\cos z}$$

eine holomorphe Funktion, und ihre Ableitung kann genau wie im Reellen berechnet werden als

$$f'(z) = (4z\sin z - \sin^2 z + \cos z)e^{2z^2+\cos z}\,.$$

Eine bislang noch nicht betrachtete einfache Funktion ist die Betragsfunktion $f(z) = |z|$. Hier ist

$$f(x+iy) = \sqrt{x^2+y^2}$$

stets reell, also $u(x,y) = f(x+iy)$ und $v(x,y) \equiv 0$. Da

$$u_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{und} \quad u_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

im Nullpunkt undefiniert und überall sonst ungleich Null sind, sind hier die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen *nirgends* erfüllt; im Komplexen ist also die Betragsfunktion *nirgends* komplex differenzierbar oder gar holomorph.

Dasselbe gilt auch für die komplexe Konjugation $f(z) = \overline{z}$, denn hier ist

$$f(x+iy) = x - iy, \quad \text{d.h. } u(x,y) = x \text{ und } v(x,y) = -y\,,$$

so daß überall

$$u_x(x,y) = 1 \neq -1 = v_y(x,y)$$

ist. In diesem Beispiel ist das entsprechende Vektorfeld

$$(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

überall differenzierbar mit konstanter JACOBI-Matrix $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$, aber da die beiden Diagonalelemente dieser Matrix verschieden sind, entspricht sie keiner komplexen Zahl.

Für $f(z) = \mathfrak{Re}\, z$ schließlich ist $u_x \equiv 1$ und $v_y \equiv 0$, für $f(z) = \mathfrak{Im}\, z$ umgekehrt $u_x \equiv 0$ und $v_y \equiv 1$; auch diese beiden Funktionen sind also nirgends komplex differenzierbar, obwohl die entsprechenden Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$ überall beliebig oft differenzierbar sind.

d) Der Cauchysche Integralsatz

Wenn wir eine reelle Funktion einer Veränderlichen zwischen $x = a$ und $y = b$ integrieren wollen, gibt es nur eine Möglichkeit, von a nach b zu gehen: Wir befinden uns schließlich auf einer Geraden. Die komplexen Zahlen dagegen bilden eine Ebene, und dort gibt es viele Möglichkeiten, um von einem gegebenen Punkt zu einem anderen zu kommen. Integrale komplexwertiger Funktionen sind daher stets *Kurvenintegrale*.

Das Integral der komplexen Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{C}; \quad z = x + iy \mapsto u(x,y) + iv(x,y)$$

längs eines Kurvenstücks $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ kann in völliger Analogie zum RIEMANN-Integral definiert werden: Wir wählen eine Unterteilung

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$$

und betrachten dazu die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{N} f\big(\gamma(\tau_\nu)\big)\big(\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1})\big)$$

für geeignete Zwischenwerte

$$t_{\nu-1} \le \tau_\nu \le t_\nu \, ;$$

das Integral ist der Grenzwert, so er existiert, für immer feinere Unterteilungen.

Es wäre kein Problem, dies im einzelnen auszuführen und so zu einer Definition des Integrals zu kommen, es geht allerdings schneller, wenn wir mit bekannten reellen Integralen arbeiten:

Falls der Integrationsweg γ einfach gleich seinem Definitionsintervall sein sollte, γ also die identische Abbildung ist, haben wir sowohl für den Realteil als auch den Imaginärteil von f gewöhnliche RIEMANN-Summen; wenn die Folge dieser Summen überhaupt konvergiert, dann also gegen eine komplexe Zahl, deren Real- und Imaginärteil die Integrale über Real- und Imaginärteil von f sind:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b \mathfrak{Re}\, f(t)\,dt + i\int_a^b \mathfrak{Im}\, f(t)\,dt \quad \text{für } \gamma\colon \begin{cases} [a,b] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto t \end{cases} .$$

Damit kennen wir Integrale über reelle Integrationswege. Für beliebige Kurvenstücke γ konvergiert die Folge der Summen

$$\sum_{\nu=1}^{N} f\big(\gamma(\tau_\nu)\big)\big(\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1})\big)$$

bei immer weiterer Verfeinerung, falls überhaupt offensichtlich gegen das komplexe Integral

$$\int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\dot\gamma(t)\,dt$$

mit reellem Integrationsweg, wir können also das Integral einfach über diese Formel definieren:

Definition: *a)* Für eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ und ein Kurvenstück $\gamma\colon [a,b] \to D$ ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\dot\gamma(t)\,dt \, ,$$

sofern die (komponentenweise zu berechnende) rechte Seite existiert.
b) Das Integral über eine Kurve γ ist gleich der Summe der Integrale über die Kurvenstücke γ_ν, aus denen γ zusammengesetzt ist.

Wir wollen dies weiter ausrechnen und auf bekannte Integrale über reelle Vektorfelder zurückführen. Dazu schreiben wir

$$\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$$

mit $\alpha, \beta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und identifizieren $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit dem reellen Vektorfeld $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\dot\gamma(t)\,dt \\
&= \int_a^b \Big(u\big(\alpha(t),\beta(t)\big) + iv\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\Big)\big(\dot\alpha(t) + i\dot\beta(t)\big)\,dt \\
&= \int_a^b \Big(u\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\alpha(t) - v\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\beta(t)\Big)\,dt \\
&\qquad + i\Big(u\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\beta(t) + v\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\alpha(t)\Big)\,dt \\
&= \int_a^b \begin{pmatrix} u\big(\alpha(t),\beta(t)\big) \\ -v\big(\alpha(t),\beta(t)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\alpha(t) \\ \dot\beta(t) \end{pmatrix} dt \\
&\qquad + i \int_a^b \begin{pmatrix} v\big(\alpha(t),\beta(t)\big) \\ u\big(\alpha(t),\beta(t)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\alpha(t) \\ \dot\beta(t) \end{pmatrix} dt \\
&= \int_\gamma \begin{pmatrix} u(x,y) \\ -v(x,y) \end{pmatrix} ds + i \int_\gamma \begin{pmatrix} v(x,y) \\ u(x,y) \end{pmatrix} ds\,,
\end{aligned}$$

wobei wir γ in der letzten Zeile mit dem Kurvenstück $t \mapsto \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ identifiziert haben.

Mit dieser reellen Interpretation komplexer Integrale können wir nun (mit einer kleinen Einschränkung) sofort *den* zentralen Satz aus der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen beweisen:

Cauchyscher Integralsatz: $f\colon D \to \mathbb{C}$ sei eine holomorphe Funktion, und die geschlossene Kurve γ sei Randkurve einer offenen Teilmenge $G \subset D$, deren Abschluß $\overline{G}$ ganz in D liege. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0\,.$$

Beweis: Wie wir gerade nachgerechnet haben, ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} ds + i \int_\gamma \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} ds\,.$$

Wir berechnen die rechts stehenden Integrale nach dem Satz von GREEN aus Kap. II, §6*f):*

$$\int_\gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} ds = \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy = -\iint_G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy$$

und

$$\int_\gamma \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} ds = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy\,.$$

In beiden Fällen verschwindet rechts der Integrand nach den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen. Also verschwinden die rechtsstehenden Integrale, und damit folgt die Behauptung. ■

Tatsächlich gilt der CAUCHYsche Integralsatz sogar für komplex differenzierbare Funktionen, d.h. die Stetigkeit der Ableitung ist nicht notwendig. Sie ist allerdings notwendig für den Satz von GREEN, auf den auch CAUCHY 1825 seinen Satz zurückführte. Die Verallgemeinerung auf komplex differenzierbare Funktionen wurde erstmalig 1900 von dem französischen Mathematiker EDOUARD GOURSAT (1858–1936) bewiesen. Sein Beweis, wie auch andere zwischenzeitlich gefundene Beweise, arbeiten direkt mit komplexen Funktionen und setzen keinen der reellen Integralsätze voraus; sie wären daher für uns deutlich aufwendiger als CAUCHYs Beweis. Für praktische Anwendungen wird der obige Satz wohl meist ausreichen; die Verallgemeinerung führt allerdings zu einem erheblich besseren theoretischen Verständnis der komplexen Differenzierbarkeit: Insbesondere kann man damit zeigen, daß Holomorphie und komplexe Differenzierbarkeit tatsächlich dasselbe sind.

Aus dem CAUCHYschen Integralsatz folgt auch, daß Integrale über eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion nicht vom Integrationsweg abhängen, sondern nur von dessen Endpunkten: Sind nämlich γ_1 und γ_2 zwei Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt, so bildet γ_1 zusammen mit der rückwärts durchlaufenen Kurve γ_2 eine geschlossene Kurve γ, auf die der CAUCHYsche Integralsatz anwendbar sein sollte. Etwas problematisch ist dabei nur die Bedingung, daß γ Randkurve einer offenen Menge sein soll. Für konkrete Kurven ist das selten ein Problem, auch wenn man (falls sich γ_1 und γ_2 schneiden) meist mit mehreren geschlossenen Kurven argumentieren muß. Der allgemeine Fall ist mathematisch etwas aufwendiger und braucht insbesondere auch den JORDANschen Kurvensatz; auf Einzelheiten sei daher hier verzichtet.

Als nächstes wollen wir uns überlegen, daß auch im Komplexen ein Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt, nämlich

Satz: Zur Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ gebe es eine komplex differenzierbare Funktion $F\colon D \to \mathbb{C}$, so daß $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in D$. Weiter sei γ eine in D liegende Kurve mit Anfangspunkt z_1 und Endpunkt z_2. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)\,.$$

Zum *Beweis* genügt es, ein Kurven*stück* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ zu betrachten. Wir schreiben

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \text{und} \quad F(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)\,;$$

da F holomorph ist, folgt

$$u(x,y) = U_x(x,y) = V_y(x,y) \quad \text{und} \quad v(x,y) = -U_y(x,y) = V_x(x,y)\,.$$

Damit ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} ds + i\int_\gamma \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} ds = \int_\gamma \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} ds + i\int_\gamma \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} ds\,.$$

Nun erinnern wir uns an die Definition eines reellen Linienintegrals: Ein Vektorfeld wird integriert, indem man es in jedem Punkt von γ mit dem dortigen Tangentenvektor skalar multipliziert und dieses Produkt über $[a,b]$ integriert. Schreiben wir $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, so ist der Tangentenvektor gleich $\begin{pmatrix} \dot\alpha(t) \\ \dot\beta(t) \end{pmatrix}$. Damit folgt

$$\int_\gamma \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} ds = \int_a^b \Big(U_x\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\alpha(t) + U_y\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\beta(t)\Big)\,dt$$

und

$$\int_\gamma \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} ds = \int_a^b \Big(V_x\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\alpha(t) + V_y\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\dot\beta(t)\Big)\,dt\,.$$

Die rechtsstehenden Integranden sind nach der Kettenregel gleich

$$\frac{d}{dt}U\big(\alpha(t),\beta(t)\big) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}V\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\,,$$

die Integrale also nach dem klassischen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gleich

$$U\big(\alpha(b),\beta(b)\big) - U\big(\alpha(a),\beta(a)\big) \quad \text{und} \quad V\big(\alpha(b),\beta(b)\big) - V\big(\alpha(a),\beta(a)\big)\,.$$

Alles zusammen ergibt das Endergebnis

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \Big(U\big(\alpha(b),\beta(b)\big) + iV\big(\alpha(b),\beta(b)\big)\Big) \\ &\quad - \Big(U\big(\alpha(a),\beta(a)\big) + iV\big(\alpha(a),\beta(a)\big)\Big) \\ &= F\big(\alpha(b)+i\beta(b)\big) - F\big(\alpha(a)+i\beta(a)\big) = F(z_2) - F(z_1)\,.\end{aligned}$$

■

e) Die Cauchysche Integralformel

Beim Beweis des CAUCHYschen Integralsatzes mußten wir die Holomorphie von f im gesamten Bereich D voraussetzen; nur so waren die Voraussetzungen für die Anwendung des Satzes von GREEN gegeben. Tatsächlich liegt es nicht nur an der Beweismethodik, daß wir diese Voraussetzung brauchen, sondern der Satz kann definitiv falsch werden, wenn die Funktion auch nur in *einem* Punkt des Innengebiets G von γ undefiniert ist.

Als Beispiel dazu betrachten wir die Funktion $f(z) = 1/z$ auf dem Einheitskreis $\gamma\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C};\quad t \mapsto e^{it}$ und fragen nach dem Integral

$$\int_\gamma f(z)\,dz\,.$$

Auf dem Umweg über das Reelle läßt sich dieses Integral leicht ausrechnen: Wegen $\dot\gamma(t) = ie^{it} = i\gamma(t)$ ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\dot\gamma(t)}{\gamma(t)}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} i\,dt = 2\pi i\,.$$

Nach dem Satz vom Ende des letzten Abschnitts können wir so ein Integral auch rein komplex berechnen, wenn wir eine Stammfunktion von f kennen; hier sollte das der (bislang noch nicht als komplexe Funktion eingeführte) natürliche Logarithmus sein. Wenn wir den als holomorphie Funktion auf $\mathbb{C}$ oder zumindestes $\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ definieren könnten, ließe sich der Satz anwenden und das Integral wäre Null – im Widerspruch zum gerade berechneten Ergebnis. Also muß es offensichtlich Probleme mit dem komplexen Logarithmus geben.

An der Ableitung des Logarithmus kann es nicht liegen: Der Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion ist eine unmittelbare Folgerung aus der Kettenregel und gilt daher im Komplexen genauso wie im Reellen. Falls wir also den natürlichen Logarithmus $\ln z$ als eine Umkehrfunktion der Exponentialfunktion definieren können, hat er die Ableitung $1/z$.

Mit der Definition als Umkehrfunktion allerdings gibt es Probleme: Im Reellen ist die Exponentialfunktion streng monoton wachsend, also insbesondere injektiv, und damit ist klar, daß es genau eine Umkehrfunktion gibt, eben den natürlichen Logarithmus.

Im Komplexen dagegen ist die Exponentialfunktion nicht mehr injektiv: Auf Grund der Beziehung $e^{2\pi i} = 1$ ist $e^z = e^{z+2k\pi i}$ für jede ganze Zahl k, es gibt also unendlich viele komplexe Zahlen, die von der Exponentialfunktion allesamt auf denselben Wert abgebildet werden. Wie man mit so einem Problem umgeht, ist aus der reellen Analysis bekannt: Der Sinus ist schließlich auch nicht injektiv; zur Definition seiner Umkehrfunktion, des Arkussinus, wird er einfach eingeschränkt auf das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, das er bijektiv auf $[-1, 1]$ abbildet; diese Einschränkung hat dann eine wohldefinierte Umkehrfunktion $\arcsin\colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Um bei der komplexen Exponentialfunktion genauso vorgehen zu können, müssen wir zunächst eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ finden, auf der sie injektiv ist.

Ist $e^{z_1} = e^{z_2}$ für zwei komplexe Zahlen z_1, z_2, so ist $e^{z_1 - z_2} = 1$, es reicht also, alle $z \in \mathbb{C}$ zu bestimmen, für die $e^z = 1$ ist. Aus $e^{x+iy} = 1$ folgt zunächst, daß $\left|e^{x+iy}\right| = \left|e^x \cdot e^{iy}\right| = e^x = 1$ sein muß, also $x = 0$. Damit muß auch $e^{iy} = \cos y + i \sin y = 1$ sein, also $\cos y = 1$ und $\sin y = 0$, was genau für die ganzzahligen Vielfachen von 2π gilt. Also ist $e^{z_1} = e^{z_2}$ genau dann, wenn sich z_1 und z_2 um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden.

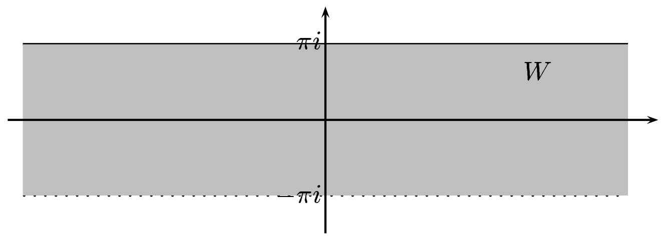
Damit ist die komplexe Exponentialfunktion injektiv beispielsweise auf der Menge

$$W = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} \;\middle|\; -\pi < y \le \pi \right\}$$

wie auch auf jedem anderen Streifen der Breite 2π parallel zur reellen Achse, der nicht beide Begrenzungslinien enthält, denn zwei Punkte aus einer solchen Menge können unmöglich die Differenz $2\pi i$ haben.

Wir wollen uns überlegen, daß die Exponentialfunktion W bijektiv abbildet auf $\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$: Jede Zahl $w \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ läßt sich schreiben als $w = re^{i\varphi}$ mit einer reellen Zahl $r = |w| > 0$ und einem Winkel φ

mit $-\pi < \varphi \leq \pi$. (Dies entspricht einfach der Darstellung in reellen Polarkoordinaten.) Zu r gibt es eine reelle Zahl x mit $e^x = r$, nämlich $x = \ln r$, und damit ist $e^{x+i\varphi} = w$.



Definition: Der Hauptwert $\operatorname{Ln} z$ des natürlichen Logarithmus der komplexen Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist die eindeutig bestimmte komplexe Zahl $w \in W$ mit $e^w = z$.

Der so definierte Logarithmus ist aber leider nicht holomorph auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, denn für eine negative reelle Zahl x ist $\operatorname{Ln} x = \ln|x| + \pi i$, für benachbarte Zahlen der Form $x - i\varepsilon$ mit kleinem $\varepsilon > 0$ aber liegt $\operatorname{Ln}(x - i\varepsilon)$ in der Nähe von $\ln|x| - \pi i$. Der Hauptwert des natürlichen Logarithmus ist also unstetig auf der negativen reellen Achse; überquert man diese, springt er um $2\pi i$.

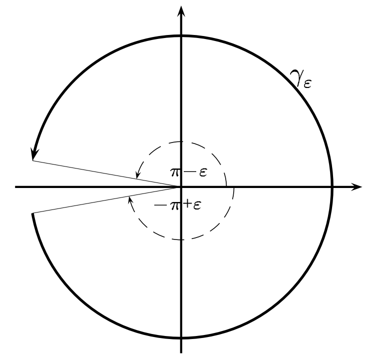
Der Satz am Ende des letzten Abschnitts ist nur anwendbar, wenn wir eine auf dem ganzen Integrationsweg holomorphe Stammfunktion haben; da der Einheitskreis die negative reelle Achse schneidet, ist das hier nicht der Fall. Der Satz wird aber anwendbar, wenn wir den Integrationsweg ein bißchen verkürzen: Das Kurvenstück

$$\gamma_\varepsilon : [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto e^{it}$$

schneidet die negative reelle Achse nirgends, so daß $\operatorname{Ln} z$ auf und um γ_ε eine holomorphe Stammfunktion von $1/z$ ist.

Damit können wir den am Ende des vorigen Abschnitts bewiesenen Satz anwenden und erhalten

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z} = \operatorname{Ln} e^{i(\pi-\varepsilon)} - \operatorname{Ln} e^{i(-\pi+\varepsilon)} = i(\pi - \varepsilon) - i(-\pi + \varepsilon) = 2i(\pi - \varepsilon) .$$



Für $\varepsilon \to 0$ konvergiert dies gegen $2\pi i$, wie zu erwarten erhalten wir also auch auf diesem Weg das Ergebnis

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 .$$

Insbesondere reicht also schon ein einziger Punkt von G, in dem $f(z)$ nicht definiert ist, um die Behauptung des CAUCHYschen Integralsatzes falsch zu machen.

Das obige Beispiel läßt sich noch stark verallgemeinern: Zunächst können wir anstelle des Einheitskreises auch jeden anderen Kreis um den Nullpunkt betrachten, denn da für $-\pi < t \leq \pi$ und $r > 0$

$$\operatorname{Ln}\left(re^{it}\right) = \ln r + it$$

ist, hebt sich der Term $\ln r$ in obiger Rechnung einfach weg.

Als nächstes können wir den Nullpunkt durch einen anderen festen Punkt $w \in \mathbb{C}$ ersetzen; für einen Kreis

$$\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto w + re^{it} \quad \text{mit} \quad r > 0$$

ist dann

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - w} = 2\pi i$$

und noch etwas allgemeiner

$$\int_\gamma \frac{a}{z-w}\,dz = a \int_{gamma} \frac{dz}{z-w} = 2\pi i \cdot a \quad \text{für alle } a \in \mathbb{C}\,.$$

Tatsächlich können wir den Kreis sogar ersetzen durch *irgendeine* geschlossene doppelpunktfreie Kurve γ, die ein beschränktes Gebiet G berandet und die im mathematisch positiven Sinne, dem Gegenuhrzeigersinn also, durchlaufen wird; auch dann ist für jeden inneren Punkt w von G

$$\int_\gamma \frac{a}{z-w}\,dz = 2\pi i \cdot a\,.$$

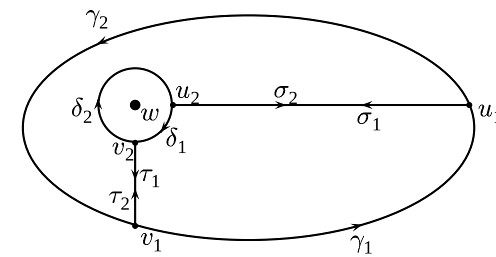
Der Beweis dieser Tatsache ist etwas umfangreicher; im Hinblick auf die nächste Verallgemeinerung wollen wir ihn gleich etwas allgemeiner führen und das Ergebnis als Lemma festhalten:

Lemma: $f\colon D \to \mathbb{C}$ sei eine holomorphe Funktion, und die geschlossene Kurve γ sei Randkurve einer offenen Teilmenge $G \subset D$, die sie im Gegenuhrzeigersinn umlaufe, und deren Abschluß $\overline{G}$ ganz in D liege. Dann ist für jeden inneren Punkt $w \in G$

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \int_\kappa \frac{f(z)}{z-w}\,dz \quad \text{mit} \quad \kappa\colon \begin{cases} [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \\ \qquad t \mapsto w + re^{it} \end{cases},$$

wobei r so gewählt ist, daß die Kreisscheibe um w mit Radius r ganz in G liegt.

Beweis: Wir wählen geeignete Punkte u_1, v_1 auf γ sowie u_2, v_2 auf κ derart, daß es Verbindungskurven von u_1 nach u_2 und von v_1 nach v_2 gibt, die (abgesehen von den Endpunkten u_2, v_2) ganz in G verlaufen und weder sich selbst noch einander schneiden.



Wir bezeichnen das Kurvenstück von u_1 nach u_2 mit σ_1 und das rückwärts durchlaufene Kurvenstück mit σ_2; entsprechend sei das Kurvenstück von v_1 nach v_2 mit τ_1 und die Gegenrichtung mit τ_2 bezeichnet. Außerdem sei γ_1 der Teil von γ zwischen u_1 und v_1 und γ_2 der zwischen v_1 und u_1, jeweils im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen. Auf dem Kreis κ bewegen wir uns ausnahmsweise *im Uhrzeigersinn;* um Verwechslungen mit der üblichen Umlaufrichtung zu vermeiden, verwenden wir dazu einen neuen Buchstaben und bezeichnen das Stück zwischen u_2 und v_2 als δ_1, das zwischen v_2 und u_2 als δ_2.

Dann können wir eine geschlossene Kurve η_1 betrachten, die von u_1 ausgehend zunächst mit dem Kurvenstück σ_1 nach u_2 geht, dann entlang δ_1 nach v_2 und mit τ_1 nach v_1, um dann mit γ_1 nach u_1 zurückzukehren.

Entsprechend können wir auch eine geschlossene Kurve η_2 betrachten, die nacheinander die Kurvenstücke $\gamma_2, \tau_2, \delta_2, \sigma_2$ durchläuft.

Beide Kurven enthalten den Punkt w nicht in ihrem Innengebiet; nach dem CAUCHYschen Integralsatz ist daher

$$\int_{\eta_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = \int_{\eta_2} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = 0\,.$$

Wenn wir die Kurvenstücke einsetzen heißt dies, daß

$$\int_{\sigma_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\delta_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\tau_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} + \int_{\gamma_1} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = 0$$