Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

31. März 2004

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Bestimmen Sie alle Polstellen der Funktion $f(z) = \dfrac{1}{e^z + e^{-z}}$!

2) Was ist $\int_\gamma z\,dz$ für $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = t + i \sin t$?

3) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.

4) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von $f(t) = 8 \sin^4 t$!

5) *Richtig oder falsch:* Falls die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch ist, kann jede Komponente des Lösungsvektors des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ als Linearkombination von Exponentialfunktionen $e^{\lambda t}$ mit geeigneten Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ geschrieben werden.

6) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 6\sqrt[3]{y(t)}$ mit $y(0) = 0$ ist eindeutig lösbar.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

Was ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{18x^2}{(x^2+16)(x^2+25)}\,dx$?

Aufgabe 2: *(7 Punkte)*

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode 2π, und für $-\pi < t \le \pi$ sei
$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < \pi/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$

a) Skizzieren Sie die Funktion f über dem Intervall $[-3\pi, 3\pi]$!

b) Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?

c) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von f !

d) k sei eine ganze Zahl. Wohin konvergiert die berechnete Fourier-Reihe für $t = \frac{1}{2}k\pi$?

e) Wo tritt bei der Konvergenz dieser Fourier-Reihe das Gibbs-Phänomen auf?

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(t) = e^{-|t|}$!

b) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\widehat{f}(\omega)$ von $f(t)$!

c) Geben Sie diese in rein reeller Form an!

d) Was ist die Fourier-Transformierte der Faltung $f * f$?

Aufgabe 4: *(9 Punkte)*

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$!

b) Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben diese Eigenwerte?

c) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

d) Was ist e^{At} für $t \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 5: *(5 Punkte)*

e) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) + 2y(t) + 3z(t) & x(0) &= 0 \\ \dot{y}(t) &= x(t) + y(t) + z(t) & y(0) &= 2\ ! \\ \dot{z}(t) &= 3x(t) + 2y(t) + z(t) & z(0) &= -2 \end{aligned}$$

Die folgende Beziehung kann dabei ohne Beweis verwendet werden:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow e^{At} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 + 4e^{5t} + 5e^{-2t} & 4e^{5t} - 4 & -5e^{-2t} + 4e^{5t} + 1 \\ e^{5t} - 2 & 8 + 2e^{5t} & 2e^{5t} - 2 \\ -5e^{-2t} + 4e^{5t} + 1 & 4e^{5t} - 4 & 1 + 4e^{5t} + 5e^{-2t} \end{pmatrix}$$

b) Wir verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

c) Sind diese Lösungen stabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen?

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 40x(t) = 400t + 160\,!$$

b) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

$\mathcal{H}\ \mathcal{I}\ \mathcal{L}\ \mathcal{F}\ \mathcal{S}\ \mathcal{M}\ \mathcal{I}\ \mathcal{T}\ \mathcal{T}\ \mathcal{E}\ \mathcal{L}$

Als Hilfsmitel sind nur Taschenrechner ohne Graphik
und ohne höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

$\mathcal{H}\ \mathcal{I}\ \mathcal{N}\ \mathcal{W}\ \mathcal{E}\ \mathcal{I}\ \mathcal{S}\ \mathcal{E}$

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \qquad \mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \qquad \mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ für } n \geq 0$$

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.
Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe,
notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •