Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

31. Januar 2004

Scheinklausur Höhere Mathematik II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{\sin z}$ ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion.

Lösung: *Richtig,* denn $\sin z$ und $\sin 2z$ sind auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Zwar hatt $\sin z$ bei jedem ganzzahligen Vielfachen von π eine einfache Nullstelle, aber dort hat verschwindet auf $\sin 2z$, so daß der Quotient einen endlichen Grenzwert hat. Weitere Nullstellen von $\sin z$ gibt es nicht.

Alternative Lösung: Nach dem Additionstheorem (oder durch Ausmultiplizieren nach den Eulerschen Formeln) folgt $\sin 2z = 2\sin z \cos z$. Damit ist $f(z) = 2\cos z$ holomorph.

2) Was ist $\displaystyle\int_\kappa \frac{dz}{\sin^2 z}$ für den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Kreisbogen κ um Null mit Radius zwei?

Lösung: Der Integrand ist meromorph mit Polen bei den ganzzahligen Vielfachen von π, von denen nur die Null im Innern des von κ berandeten Kreises liegt. Nach dem Residuensatz ist das Integral also gleich $2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \dfrac{1}{\sin^2 z}$, und das verschwindet, da $\dfrac{1}{\sin^2 z}$ eine gerade Funktion ist.

3) Was ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^5}{x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1}\,dx$?

Lösung: Da der Integrand eine ungerade Funktion ist, verschwindet das Integral.

4) Richtig oder falsch: Für jede Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix}\dot x(t)\\ \dot y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$$

ist $x(t)$ in der Form $\alpha e^{2t} + \beta e^{3t}$ darstellbar mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Lösung: *Richtig,* denn $\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ hat die beiden verschiedenen Eigenwerte zwei und drei, ist also diagonalisierbar, und die Exponentialfunktion, angewandt auf die diagonalisierte Matrix, liefert eine Diagonalmatrix mit Einträgen e^{2t} und e^{3t}.

5) Richtig oder falsch: Die $n \times n$-Matrix A mit $a_{k\ell} = e^{i(k-\ell)}$ hat lauter reelle Eigenwerte.

Lösung: *Richtig,* denn $a_{\ell k} = e^{i(\ell-k)} = e^{-i(k-\ell)}$ ist konjugiert komplex zu $a_{k\ell}$, d.h. die Matrix ist Hermitesch.

6) Welche Nullstellen hat das Polynom $f(x) = x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 7x - 10$?

Lösung: Das Produkt aller Nullstellen ist -10 und ihre Summe sieben; *falls* alle Nullstellen ganzzahlig sein sollten, kämen nur $\pm 1, \pm 2, \pm 5$ und ± 10 in Frage.

$$f(1) = 1 - 7 + 9 + 7 - 10 = 0 \quad \text{und} \quad f(-1) = 1 + 7 + 9 - 7 - 10 = 0$$

verschwinden beide; die beiden restlichen haben Summe sieben und Produkt zehn, was für zwei und fünf spricht. In der Tat ist

$$f(2) = 16 - 7 \cdot 8 + 9 \cdot 4 + 7 \cdot 2 - 10 = 16 - 56 + 36 + 14 - 10 = 0\,,$$

womit nach VIÈTE auch die vierte Nullstelle fünf feststeht.

(Tatsächlich hätten wir $f(2)$ nicht unbedingt berechnen müssen, denn die beiden Bedingungen $uv = 10$ und $u + v = 7$ führen auf die quadratische Gleichung $u(7-u) = 10$, deren beide Lösungen wir nicht ausrechnen müssen, da wir schon wissen, daß $u = 2$ und $u = 5$ sie erfüllen; weitere Lösungen kann es nicht geben.)

7) Was ist die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung $y^{(4)}(t) + 2\ddot{y}(t) + y(t) = 0$?

Lösung: Die charakteristische Gleichung $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = 0$ hat die jeweils zweifachen Lösungen $\pm i$; die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung ist somit $y(t) = (a + bt)\cos t + (c + dt)\sin t$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+2}{x^4+4}\,dx$!

Lösung: Bei Integralen einer solchen Bauart führt meist der Umweg über die komplexen Zahlen am schnellsten zu Erfolg. Dazu müssen wir die Pole des Integranden kennen, also zunächst die Nullstellen des Nenners.

Das Nennerpolynom $z^4 + 4$ verschwindet genau dann, wenn $z^2 = \pm 2i$ ist. Die Wurzel von $2i$ liegt auf der Winkelhalbierenden durch den ersten und dritten Quadranten, ist also ein reelles Vielfaches von $1 + i$. Da $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$ ist, haben wir die beiden Wurzeln $1 + i$ und $-i - i$. Die Wurzeln von $-2i$ sind das i-fache davon, also $-1 + i$ und $1 - i$. Damit hat

$$z^4 + 4 = (z^2 + 2i)(z^2 - 2i) = \big((z - 1 + i)(z + 1 - i)\big)\big((z - 1 - i)(z + 1 + i)\big)$$

die vier Nullstellen $\pm 1 \pm i$.

Der Integrationsweg γ_R sei der Halbkreis um den Nullpunkt vom Punkt R durch die obere Halbebene zum Punkt $-R$; in Formeln also $\gamma_R\colon [0, \pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto Re^{it}$.

δ_R sei der Integrationsweg, der mit γ_R beginnt und dann entlang der reellen Achse von $-R$ nach R geht. Damit ist δ_R eine geschlossene Kurve, und Integrale entlang δ_R können nach dem Residuensatz berechnet werden.

Für $R > \sqrt{2}$ liegen im Innern des von δ_R berandeten Halbkreises die beide Pole $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = -1 + i$. Beide sind Pole erster Ordnung, d.h.

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=z_\nu} \frac{z^2+2}{(z^4+4)} &= \lim_{z\to z_\nu} \frac{(z - z_\nu)(z^2+2)}{z^4+4} = \lim_{z\to\pm 1+i} \frac{\big(z - (1 \pm i)\big)(z^2+2)}{(z^2+2i)(z^2-2i)} \\ &= \lim_{z\to\pm 1+i} \frac{(z^2+2)}{\big(z + (1 \pm i)\big)(z^2 \pm 2i)} = \frac{\pm 2i + 2}{2(\pm 1 + i)(\pm 4i)} = \frac{2 \pm 2i}{8i \pm 8} = -\frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\int_{\delta_R} \frac{z^2+2}{z^4+4}\,dz = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=1+i}\frac{z^2+2}{z^4+4} + \operatorname*{Res}_{z=-1+i}\frac{z^2+2}{z^4+4}\right)$$
$$= 2\pi i\left(-\frac{i}{4}-\frac{i}{4}\right) = \pi\,.$$

Das ist auch der Wert des gesuchten Integrals, denn für $R\to\infty$ geht wegen $\dot\gamma_R(t) = iRe^{it}$ der Integrand von

$$\int_{\gamma_R}\frac{z^2+2}{z^2+4}\,dz = \int_0^\pi \frac{(R^2e^{2it}+2)\cdot iRe^{it}}{R^4e^{4it}+4}\,dt$$

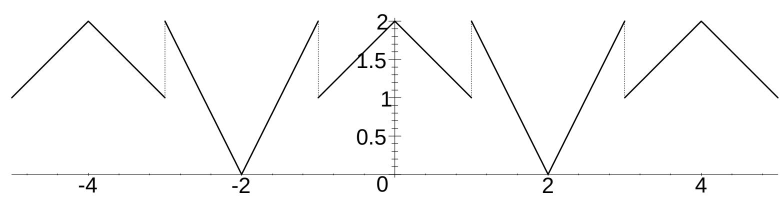
gegen Null, also – wegen des festen Integrationsintervalls $[0,\pi]$ – auch das Integral, so daß das Integral über δ_R für $R\to\infty$ gleich dem Integral über die reelle Achse wird.

Aufgabe 2: *(9 Punkte)*

Sei $f(t) = \begin{cases} 2-|t| & \text{für } |t|\le 1\\ 4-|2t| & \text{für } 1<|t|\le 2\end{cases}$, periodisch fortgesetzt mit Periode vier.

a) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-5,5]$!

Lösung:



b) Ist f gerade, ungerade oder keins von beiden?

Lösung: Da das Intervall $[-2, 2]$, in dem f explizit vorgegeben ist, symmetrisch zum Nullpunkt liegt und $|t|$ eine gerade Funktion ist, ist auch f gerade.

c) Berechnen Sie die reelle FOURIER-Reihe von f!

Lösung: Da f eine gerade Funktion ist, gibt es keine Sinusterme. Zur Berechnung des konstanten Terms sowie der Koeffizienten der Kosinusterme integrieren wir am besten über das Periodenintervall $[-2, 2]$, in dem wir f ins geschlossener Form darstellen können. Außerdem können wir nochmals ausnutzen, daß f eine gerade Funktion ist, so daß es reicht, von Null bis zwei zu integrieren und das Ergebnis zu verdoppeln. Dadurch werden wir die beim Integrieren unangenehmen Betragsstriche los.

Für das konstante Glied c_0, das Periodenmittel, erhalten wir somit

$$c_0 = 2\cdot\frac14\int_0^2 f(t)\,dt = \frac12\int_0^1(2-t)\,dt + \frac12\int_1^2(4-2t)\,dt = \frac12\left(\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 - (4t-t^2)\Bigg|_1^2\right)$$
$$= \frac12\left(2-\frac12+8-4-4+1\right) = \frac54\,.$$

Für die höheren Koeffizienten erhalten wir

$$a_k = 2\cdot\frac24\int_0^2 f(t)\cos k\omega t\,dt = \int_0^1(2-t)\cos k\omega t\,dt + \int_1^2(4-2t)\cos k\omega t\,dt\,.$$

Da der zweite Integrand einfach des doppelte des ersten ist, berechnen am besten zunächst das unbestimmte Integral

$$F(t) = \int (2-t)\cos k\omega t\,dt = (2-t)\frac{\sin k\omega t}{k\omega} + \int \frac{\sin k\omega t}{k\omega} = (2-t)\frac{\sin k\omega t}{k\omega} - \frac{\cos k\omega t}{(k\omega)^2} + C\,.$$

Da F Periode vier hat, ist die Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$; also

$$F(t) = \int (2-t)\cos k\omega t\,dt = (2-t)\frac{2\sin\frac{k}{2}\pi t}{k\pi} - \frac{4\cos\frac{k}{2}\pi t}{(k\pi)^2} + C\,.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} a_k &= F(1) - F(0) + 2F(2) - 2F(1) = 2F(2) - F(1) - F(0) \\ &= -2\cdot\frac{4\cos k\pi}{(k\pi)^2} - \frac{2\sin\frac{k}{2}\pi}{k\pi} + \frac{4\cos\frac{k}{2}\pi}{(k\pi)^2} + \frac{4}{(k\pi)^2}\,. \end{aligned}$$

Da hier trigonometrische Funktionen bei ganz- oder halbzahligen Vielfachen von π ausgewertet werden, läßt sich das noch beträchtlich vereinfachen.
Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist $\cos k\pi = (-1)^k$; für ungerade k ist $\sin\frac{k}{2}\pi = (-1)^{(k-1)/2}$ und $\cos\frac{k}{2}\pi$ verschwindet, während für gerade k umgekehrt $\sin\frac{k\pi}{2}$ verschwindet und $\cos\frac{k\pi}{2} = (-1)^{k/2}$ ist. Für gerades k bekommen wir also

$$a_k = \frac{-8\cdot(-1)^k + 4\cdot(-1)^{k/2} + 4}{(k\pi)^2} = \begin{cases} 0 & \text{für durch vier teilbare } k \\ -\frac{8}{(k\pi)^2} & \text{sonst} \end{cases},$$

und für ungerade k ist

$$a_k = \frac{-8\cdot(-1)^k + 4}{(k\pi)^2} - \frac{2\cdot(-1)^{(k-1)/2}}{k\pi} = \frac{12}{(k\pi)^2} - \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k\pi}\,.$$

Die FOURIER-Reihe ist somit

$$S_f(t) = \frac{5}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k}{2}\pi t \quad \text{mit} \quad a_k = \begin{cases} 0 & \text{für durch vier teilbare } k \\ -\frac{8}{(k\pi)^2} & \text{für sonstige gerade } k \\ \frac{12}{(k\pi)^2} - \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k\pi} & \text{für ungerade } k \end{cases}$$

d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert diese gegen $f(t)$? Wohin konvergiert sie sonst?

Lösung: Die FOURIER-Reihe konvergiert zumindest überall dort gegen $f(t)$, wo f stetig ist, also überall außer bei den ungeraden ganzen Zahlen. Dort haben wir jeweils von der einen Seite her Grenzwert eins und von der anderen Grenzwert zwei, also konvergiert die Reihe gegen $\frac{3}{2}$.

e) Für welche $t \in \mathbb{R}$ tritt das GIBBS-Phänomen auf?

Lösung: Nur für die in *d)* bestimmten Sprungstellen, also die ungeraden ganzen Zahlen.

Aufgabe 3: (*3 Punkte*)
Berechnen Sie die Ableitung im Distributionensinn der Funktion f aus Aufgabe 2!

Lösung: Wir wissen, daß die Ableitung im Distributionensinn überall dort, wo die Funktion differenzierbar ist, mit der Ableitung selbst übereinstimmt, während jede Sprungstelle a einen Term

$$\big(f(a^+) - f(a^-)\big)\cdot\delta(t-a)$$

liefert. Definieren wir also eine periodische Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Periode vier durch

$$g(t) = \begin{cases} -2 & \text{für } 0 \le t < 1 \\ -4 & \text{für } 1 \le t < 2 \\ +4 & \text{für } 2 \le t < 3 \\ +2 & \text{für } 3 \le t < 4 \end{cases},$$

so ist die Ableitung im Distributionensinne

$$\dot{T}_f(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big(\varphi(4k+1) - \varphi(4k+3)\big) + \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt\,,$$

und als „Funktion“ geschrieben ist die Ableitung gleich

$$g(t) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\delta\big(t-(4k+1)\big) - \varphi\big(t-(4k+3)\big)\Big)\,.$$

Für alle, denen das zu knapp vorkommt, ist hier eine ausführliche Herleitung aus der Definition der Ableitung einer Distribution: Für eine Funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\begin{aligned}\dot{T}_f(\varphi) &= -T_f(\dot\varphi) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\dot\varphi(t)\,dt = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(t)\dot\varphi(t)\,dt \\ &= -\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_{4k}^{4k+1} f(t)\dot\varphi(t)\,dt + \int_{4k+1}^{4k+2} f(t)\dot\varphi(t)\,dt + \int_{4k+2}^{4k+3} f(t)\dot\varphi(t)\,dt + \int_{4k+3}^{4k+4} f(t)\dot\varphi(t)\,dt \right)\end{aligned}$$

Im Intervall $[4k, 4k+1]$ nimmt f dieselben Werte an wie im Intervall $[0, 1]$; genauer ist dort

$$f(t) = f(t-4k) = 2 - |t-4k| = 4k+2-t\,;$$

entsprechendes gilt für die anderen Intervalle. Um die entsprechenden Integrale zu berechnen, beachten wir, daß allgemein gilt

$$\int_a^b (\alpha + \beta t)\dot{v}arphi(t)\,dt = \alpha\big(\varphi(b) - \varphi(a)\big) + \beta\big(b\varphi(t) - a\varphi(a)\big) - \int_a^b \beta\varphi(t)\,dt\,.$$

Damit wird

$$\int_{4k}^{4k+1} f(t)\dot\varphi(t)\,dt = \int_{4k}^{4k+1} (4k+2-t)\dot\varphi(t)\,dt$$

$$= (4k+2)(\varphi(4k+1) - \varphi(4k)\big) + (4k+1)\varphi(4k+1) - 4k\varphi(4k) - 2\int_{4k}^{4k+1} \varphi(t)\,dt\,,$$

entsprechend auch

$$\int_{4k+1}^{4k+2} f(t)\dot\varphi(t)\,dt = \int_{4k+1}^{4k+2} (4k+4-2t)\dot\varphi(t)\,dt$$

$$= (4k+4)\big((\varphi(4k+2) - \varphi(4k+1)\big) + (4k+2)\varphi(4k+2) - (4k+1)\varphi(4k+1) - 4\int_{4k+1}^{4k+2} \varphi(t)\,dt\,,$$

$$\int_{4k+2}^{4k+3} f(t)\dot\varphi(t)\,dt = \int_{4k+2}^{4k+3} (2+t-4k)\dot\varphi(t)\,dt$$

$$= (2-4k)\big((\varphi(4k+3)-\varphi(4k+2)\big) + (4k+3)\varphi(4k+3) - (4k+2)\varphi(4k+2) + 2\int_{4k+2}^{4k+3} \varphi(t)\,dt\,,$$

$$\int_{4k+3}^{4k+4} f(t)\dot\varphi(t)\,dt = \int_{4k+3}^{4k+4} (4+2t-4k)\dot\varphi(t)\,dt$$

$$= (4-4k)\big(\varphi(4k+4)-\varphi(4k+3)\big) + (4k+4)\varphi(4k+4) - (4k+3)\varphi(4k+3) + 4\int_{4k+3}^{4k+4} \varphi(t)\,dt\,.$$

Summiert man alle diese Integrale auf, verschwinden zunächst einmal alle Teilsummen der Form $b\varphi(b) - a\varphi(a)$, denn für das nächste Integral gibt es einen entsprechenden Term der Form $c\varphi(c) - b\varphi(b)$. Auch von den Termen am Anfang der jeweils zweiten Zeile hebt sich vieles weg, aber nicht alles. Um die Integrale am Ende der Zeile zusammenzufassen können wir die oben definierte Funktion g verwenden, und insgesamt wird

$$\dot T_f(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big(\varphi(4k+1) - \varphi(4k+3)\big) + \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt\,.$$

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie für $N \in \mathbb{N}$ die FOURIER-Transformierte von $f(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{-(t-k)^2}$ und geben Sie das Ergebnis in rein reeller Form an!

Lösung: Die FOURIER-Transformierte von $g(t) = e^{-t^2}$ ist laut Formelanhang am Ende der Klausur $\widehat{g}(\omega) = \sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}$ und f geht aus g hervor durch Faltung mit der Distribution

$$h(t) = \sum_{k=-N}^{N} \delta(t-k)\,.$$

Da die FOURIER-Transformierte von $\delta(t+a)$ gleich $e^{ia\omega}$ ist, folgt

$$\widehat{h}(\omega) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ik\omega} = 1 + \sum_{k=1}^{N} (e^{ik\omega} + e^{-ik\omega}) = 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos k\omega\,.$$

Somit ist

$$\widehat{f}(\omega) = \widehat{g}(\omega)\widehat{h}(\omega) = \sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}(1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos k\omega)\,.$$

b) Schreiben Sie das Ergebnis, falls Sie das nicht bereits unter *a)* gemacht haben, ohne Verwendung von Summenzeichen! Auch hier sollten Sie nur reelle Funktionen verwenden.

Lösung: Wir gehen aus von der komplexen Darstellung von $h(t)$ und verwenden die Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\widehat{h}(\omega) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ik\omega} = e^{-iN\omega}\sum_{k=0}^{2N} e^{ik\omega} = e^{-iN\omega}\frac{e^{(2N+1)i\omega} - 1}{e^{i\omega} - 1}$$

$$= \frac{e^{-i(N+\frac{1}{2})\omega}}{e^{-\frac{1}{2}i\omega}} \frac{e^{(2N+1)i\omega}-1}{e^{i\omega}-1} = \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})\omega} - e^{-i(N+\frac{1}{2})\omega}}{e^{\frac{1}{2}i\omega} - e^{-\frac{1}{2}i\omega}} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{\omega}{2}} .$$

Somit ist

$$\widehat{f}(\omega) = \sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4} \cdot \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{\omega}{2}} .$$

Aufgabe 5: (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

Lösung: Entwicklung nach der ersten Spalte gefolgt von Entwicklung nach der vierten Spalte) ergibt

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1)\big((-1-\lambda)(-3-\lambda)+1\big)$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+4\lambda+4) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)^2 .$$

Es gibt also die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ mit algebraischer und somit auch geometrischer Vielfachheit eins und den Eigenwert $\lambda_3 = -2$ mit algebraischer Vielfachheit zwei.

$\lambda_1 = 1$ hat offensichtlich den ersten Koordinateneinheitsvektor $\vec{v}_1 = \vec{b}_1$ als Eigenvektoren.

Für $\lambda_2 = -1$ ist

$$A - \lambda_2 E = A + E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

also muß wegen der zweiten Zeile die dritte Komponente eines jeden Eigenvektors verschwinden. Nach der dritten Zeile ist die zweite Komponente deren Doppeltes, verschwindet also ebenfalls. Nach der ersten Zeile schließlich ist die erste Komponente das Doppelte der vierten, also wird der Eigenraum aufgespannt vom Vektor

$$\vec{v}_2 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Für $\lambda_3 = -2$ ist

$$A - \lambda_3 E = A + 2E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Wie die letzte Zeile der Matrix zeigt, verschwindet die vierte Komponente eines jeden Eigenvektors, nach der ersten Zeile dann auch die erste. Die beiden verbleibenden Zeilen sagen uns, daß die zweite und die dritte Komponente übereinstimmen, also wird der Eigenraum aufgespannt von

$$\vec{v}_3 = \vec{b}_2 + \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und ist somit nur eindimensional. Die geometrische Vielfachheit von λ_3 ist daher nur eins.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Lösung: *Nein,* denn es gibt keine Basis des $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A.

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt Δ?

Lösung: Um eine Basis von $\mathbb{R}^4$ zu finden, bezüglich derer die Matrix Dreiecksgestalt hat, brauchen wir noch einen Hauptvektor zweiter Stufe zu $\lambda_3 = 2$. Da

$$(A+E)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

muß auch hier sowohl die erste als auch die vierte Komponente verschwindet, während es keine Bedingung an die beiden verbleibenden Komponenten gibt. Wir können also zum Beispiel $\vec{v}_4 = \vec{b}_2$ setzen. Dann ist

$$A\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\vec{v}_4 + \vec{v}_3 \,.$$

Bezüglich der Basis aus den Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ hat A somit die Dreiecksgestalt

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

d) Berechnen Sie die Matrizen $e^{\Delta t}$ und e^{At}!

Lösung: Wir schreiben

$$\Delta = D + N \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

offensichtlich ist N^2 die Nullmatrix. Da nach der allgemeinen Theorie $DN = ND$ ist, folgt

$$\begin{aligned} e^{\Delta t} &= e^{Dt} e^{Nt} = e^{Dt}(E + Nt) \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Zur Berechnung von $e^{At} = B^{-1} e^{\Delta t} B$ müssen wir $e^{\Delta t}$ zurücktransformieren in die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$. Die neuen Basisvektoren sind

$$\vec{v}_1 = \vec{b}_1, \quad \vec{v}_2 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_4, \quad \vec{v}_3 = \vec{b}_2 + \vec{b}_3 \quad \text{und} \quad \vec{v}_4 = \vec{b}_3 \,;$$

die Matrix des Basiswechsels ist also $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Zur Berechnung ihrer Inversen ist es am einfachsten, die obigen Gleichungen umzukehren: Offensichtlich ist $\vec{b}_1 = \vec{v}_1$, $\vec{b}_2 = \vec{v}_3 - \vec{v}_4$, $\vec{b}_3 = \vec{v}_4$ und $\vec{b}_4 = \vec{v}_2 - 2\vec{v}_1$, also

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ 0 & (1+t)e^{-2t} & -te^{-2t} & 0 \\ 0 & te^{-2t} & (1-t)e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

e) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ mit den Anfangsbedingungen $y_1(0) = y_3(0) = 0$ und $y_2(0) = y_4(0) = 1$, und diskutieren Sie deren Langzeitverhalten! Ist dieses typisch für allgemeine Lösungen des Systems?

Lösung: Nach der allgemeinen Theorie ist $\vec{y}(t) = e^{At}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ (1+t)e^{-2t} \\ te^{-2t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$.

Für $t \to \infty$ geht sie gegen unendlich und das ist typisch für Lösungen dieses Systems, denn da einer der Eigenwerte positiven Realteil hat (nämlich $\lambda = 1$), ist das abgesehen von Anfangsbedingungen aus einem dreidimensionalen Teilraum des $\mathbb{R}^4$ stets der Fall.

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + y(t), \quad \dot{y}(t) = -2y(t)\,!$$

Lösung: In Matrixschreibweise ist dies das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Summanden kommutieren, da der erste ein skalares Vielfaches einer Diagonalmatrix ist, und der zweite hat Quadrat Null. Somit ist

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix},$$

und die allgemeine Lösung des Systems ist

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_0 + ty_0)e^{-2t} \\ y_0 e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie: Eine Lösung dieses Systems geht genau dann monoton gegen Null, wenn ihre y-Komponente identisch verschwindet.

Lösung: x_0e^{-2t} geht monoton gegen Null, te^{-2t} aber hat ein Zwischenextremum bei $t = \frac{1}{2}$, der Nullstelle seiner Ableitung $(1-2t)e^{-2t}$. Die Lösung geht also genau dann monoton gegen Null, wenn y_0 verschwindet, unbd genau dann verschwindet auch die y-Komponente der Lösung.

Aufgabe 7: *(8 Punkte)*

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 13y(t) = 81t^2e^{-2t}$ mit $y(0) = \dot{y}(0) = 0\,!$

Lösung: Das ist ein reines Anfangswertproblem; für so etwas ist meist ein Ansatz via LAPLACE-Transformation gut geeignet. Für die LAPLACE-Transformierte $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ der Lösungsfunktion gilt

$$(s^2 + 4s + 13)Y(s) = 81\mathcal{L}\{t^2 e^{-2t}\}(s) = 81\mathcal{L}\{t^2\}(s+2) = \frac{2 \cdot 81}{(s+2)^3},$$

d.h. $Y(s) = \dfrac{2 \cdot 81}{(s^2 + 4s + 13)(s+2)^3} = \dfrac{162}{\big((s+2)^2 + 9\big)(s+2)^3}$. Nach dem Formelanhang ist

$$\mathcal{L}\left\{\cos \omega t - 1 + \frac{t^2\omega^2}{2}\right\}(s) = \frac{\omega^4}{(s^2 + \omega^2)s^3},$$

also $\mathcal{L}\left\{e^{-2t}\left(\cos \omega t - 1 + \dfrac{t^2\omega^2}{2}\right)\right\}(s) = \dfrac{\omega^4}{\big((s+2)^2 + \omega^2\big)(s-2)^3}$.

Dies können wir anwenden für $\omega = 3$; da wir nicht den Zähler $\omega^4 = 81$ haben, sondern sein Doppeltes, ist die gesuchte Lösung $y(t) = e^{-2t}\left(2\cos \omega t - 2 + t^2\omega^2\right)$.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y^{(4)}(t) - y(t) = 15\cos t$!

Lösung: Zur Lösung der homogenen Gleichung brauchen wie die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $\lambda^4 = 1$; das sind ± 1 und $\pm i$. Somit ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $z^{(4)}(t) - z(t) = 0$

$$z(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t \quad \text{mit} \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Nun brauchen wir noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Ein Ansatz der Form $y(t) = a\cos t + b\sin t$ führt offensichtlich zu nichts, denn die vierte Ableitung einer solchen Funktion ist die Funktion selbst, die Differenz also Null statt $15\cos t$.

Bei Differentialgleichungen der Form $\ddot{y}(t) - y(t) = a\cos t$ hatten wir dasselbe Problem; hier zeigte sich, daß die Amplitude der Lösungsfunktionen linear ansteigt mit t *(Resonanzkatastrophe)*. Somit empfiehlt sich ein Ansatz der Form $y(t) = (at\cos t + bt\sin t)$. Die Ableitungen von $t\cos t$ und $t\sin t$ sind die folgenden:

$x(t)$	$t\cos t$	$t\sin t$
$\dot{x}(t)$	$\cos t - t\sin t$	$\sin t + t\cos t$
$\ddot{x}(t)$	$-2\sin t - t\cos t$	$2\cos t - t\sin t$
$x^{(3)}(t)$	$-3\cos t + t\sin t$	$-3\sin t - t\cos t$
$x^{(4)}(t)$	$4\sin t + t\cos t$	$-4\cos t + t\sin t$

Somit ist $y^{(4)}(t) = (4a + bt)\sin t + (at - 4b)\cos t$ und $y^{(4)}(t) - y(t) = -4b\cos t + 4a\sin t$. Mit $a = 0$ und $b = -\frac{15}{4}$ ist dies gleich $15\cos t$, die Funktion $y(t) = -\frac{15}{4}t\sin t$ ist also eine spezielle Lösung der obigen Differentialgleichung. Deren allgemeine Lösung ist damit

$$y(t) = -\frac{15}{4}t\sin t + C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t \quad \text{mit} \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

c) Welche Lösungen von *b)* sind beschränkt, und wie verhalten sich diese für $t \to \infty$? Ist dieses Verhalten typisch für allgemeine Lösungen der Differentialgleichung?

Lösung: Da $t\sin t$ gegen unendlich geht, gibt es keine beschränkte Lösung.