Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

31. Januar 2004

Scheinklausur Höhere Mathematik II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{\sin z}$ ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion.

2) Was ist $\displaystyle\int_\kappa \frac{dz}{\sin^2 z}$ für den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Kreisbogen κ um Null mit Radius zwei?

3) Was ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^5}{x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1}\,dx$?

4) Richtig oder falsch: Für jede Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$$

ist $x(t)$ in der Form $\alpha e^{2t} + \beta e^{3t}$ darstellbar mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

5) Richtig oder falsch: Die $n \times n$-Matrix A mit $a_{k\ell} = e^{i(k-\ell)}$ hat lauter reelle Eigenwerte.

6) Welche Nullstellen hat das Polynom $f(x) = x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 7x - 10$?

7) Was ist die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung $y^{(4)}(t) + 2\ddot{y}(t) + y(t) = 0$?

Aufgabe 1: (*6 Punkte*)

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+2}{x^4+4}\,dx$!

Aufgabe 2: (*9 Punkte*)

Sei $f(t) = \begin{cases} 2-|t| & \text{für } |t| \le 1 \\ 4-|2t| & \text{für } 1 < |t| \le 2 \end{cases}$, periodisch fortgesetzt mit Periode vier.

a) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-5, 5]$!

b) Ist f gerade, ungerade oder keins von beiden?

c) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f !

d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert diese gegen $f(t)$? Wohin konvergiert sie sonst?

e) Für welche $t \in \mathbb{R}$ tritt das Gibbs-Phänomen auf?

Aufgabe 3: (*3 Punkte*)

Berechnen Sie die Ableitung im Distributionensinn der Funktion f aus Aufgabe 2 !

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie für $N \in \mathbb{N}$ die FOURIER-Transformierte von $f(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{-(t-k)^2}$ und geben Sie das Ergebnis in rein reeller Form an!

b) Schreiben Sie das Ergebnis, falls Sie das nicht bereits unter *a)* gemacht haben, ohne Verwendung von Summenzeichen! Auch hier sollten Sie nur reelle Funktionen verwenden.

Aufgabe 5: *(10 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt Δ?

d) Berechnen Sie die Matrizen $e^{\Delta t}$ und e^{At}!

e) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ mit den Anfangsbedingungen $y_1(0) = y_3(0) = 0$ und $y_2(0) = y_4(0) = 1$, und diskutieren Sie deren Langzeitverhalten! Ist dieses typisch für allgemeine Lösungen des Systems?

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + y(t), \quad \dot{y}(t) = -2y(t)\,!$$

b) Zeigen Sie: Eine Lösung dieses Systems geht genau dann monoton gegen Null, wenn ihre y-Komponente identisch verschwindet.

Aufgabe 7: *(8 Punkte)*

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 13y(t) = 81t^2e^{-2t}$ mit $y(0) = \dot{y}(0) = 0$!

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y^{(4)}(t) - y(t) = 15\cos t$!

c) Welche Lösungen von *b)* sind beschränkt, und wie verhalten sich diese für $t \to \infty$? Ist dieses Verhalten typisch für allgemeine Lösungen der Differentialgleichung?

Formelanhang

$$f(t) = e^{-t^2} \Longrightarrow \widehat{f}(\omega) = \sqrt{\pi}e^{\frac{-\omega^2}{4}}, \quad f(t) = \delta(t-a) \Longrightarrow \widehat{f}(\omega) = e^{-ia\omega}$$

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \mathcal{L}\{1-\cos \omega t\}(s) = \frac{\omega^2}{(s^2+\omega^2)s}$$

$$\mathcal{L}\{\omega t - \sin \omega t\}(s) = \frac{\omega^3}{(s^2+\omega^2)s^2}, \quad \mathcal{L}\left\{\cos \omega t - 1 + \frac{t^2\omega^2}{2}\right\}(s) = \frac{\omega^4}{(s^2+\omega^2)s^3}$$

$$\mathcal{L}\left\{(\omega^2-1)\cosh(t) - (\omega^2+1)\cos(t) + 2\cos \omega t\right\}(s) = \frac{2s(\omega^4-1)}{(s^4-1)(s^2+\omega^2)}$$

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Samstag, dem 31. Januar 2004, um 13^{00} Uhr