Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 5. Februar 2004

a) Finden Sie eine Differentialgleichung, die alle Hyperbeln $y^2 - t^2 = C$ als Lösungskurven hat!

Lösung: Wir suchen eine Differentialgleichung, deren Lösungen sich in der Form

$$F(y,t) = y^2 - t^2 = C$$

schreiben lassen. Da die Ableitung einer Konstanten nach der Zeit verschwindet, müssen wir dazu einfach $F\big(y(t)\big)$ nach t ableiten und auf Null setzen:

$$\frac{d}{dt}F\big(y(t)\big) = \frac{d}{dt}\left(y(t)^2 - t^2\right) = 2y(t)\dot y(t) - 2t = 0 \quad \text{oder} \quad y(t)\dot y(t) - t = 0\,.$$

b) Finden Sie eine Differentialgleichung, die alle Lemniskaten

$$(y^2 + t^2)^2 = 2C^2(t^2 - y^2)$$

als Lösungskurven hat! *(Hinweis: Hier kann man viel kürzen!)*

Lösung: Um dies auf die Form $F(y,t) =$ Konstante zu bringen, müssen wir durch $t^2 - y^2$ dividieren und erhalten

$$F(y,t) = \frac{(y^2+t^2)^2}{t^2-y^2} = 2C^2\,.$$

Diese Funktion leiten wir besser nicht als ganzes ab, sondern berechnen die partiellen Ableitungen nach y und t jeweils für sich; sobald wir diese kennen, haben wir auch Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial y}F(y(t),y)\dot y(t) + \frac{\partial}{\partial t} = 0\,.$$

Hier ist

$$\frac{\partial}{\partial y}(y,t) = \frac{4(t^2-y^2)(y^2+t^2)y + 2y(y^2+t^2)^2}{(t^2-y^2)^2} = \frac{2y(y^2+t^2)(3t^2-y^2)}{(y^2-t^2)^2}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t}(y,t) = \frac{4t(t^2-y^2)(y^2+t^2) - 2t(y^2+t^2)^2}{(t^2-y^2)^2} = \frac{2t(y^2+t^2)(t^2-3y^2)}{(y^2-t^2)^2}\,,$$

wir haben also die Differentialgleichung

$$\frac{2y(t)\big(y(t)^2+t^2\big)\big(3t^2-y(t)^2\big)}{\big(y(t)^2-t^2\big)^2}\dot y(t) = \frac{2t\big(y(t)^2+t^2\big)\big(t^2-3y(t)^2\big)}{\big(y(t)^2-t^2\big)^2}\,,$$

die erheblich schöner aussieht, wenn wir sie noch mit $\frac{\left(t^2-y(t)^2\right)^2}{2\left(t^2+y(t)^2\right.})$ multiplizieren zu

$$y(t)\big((3t^2-y(t)^2)\big)\dot y(t) + t\big(t^2-3y(t)^2\big) = 0\,.$$

c) Hat diese Differentialgleichung auch noch weitere Lösungskurven?

Lösung: Ja, natürlich: Die Kurven, bei denen C^2 durch einen negativen Wert ersetzt wird, sind auch Lösungen, wenn auch keine sehr verschiedenen: Sie entstehen aus den angegebenen durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

d) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen wenn möglich explizit, und diskutieren Sie ansonsten, wo die implizite Lösung eindeutig nach y aufgelöst werden kann!

$$\begin{array}{llll} t\dot{y}(1) + y(t) = 0 & (1) & (1+t^2)\dot{y}(t) + 2ty(t) = 0 & (2) \\ t\dot{y}(t) + y(t) + e^t = 0 & (3) & \big((te^{y(t)} + 2y(t)\big)\dot{y}(t) + e^{y(t)} = 0 & (4) \\ 8ty(t)\sin\big(4y(t)^2\big)\dot{y}(t) = \cos\big(4y(t)^2\big) & (5) & \big(t\cos y(t)\big) + \sin y(t) = 0 & (6) \end{array}$$

Lösung: Wir wählen a, b jeweils so, daß $a\big(y(t), t\big)\dot{y}(t) + b\big(y(t), t\big) = 0$ die gegebene Gleichung ist. Für (1) ist also $a(y,t) = t$ und $b(y,t) = y$, also $a_t = b_y = 1$, so daß die Gleichung exakt ist. Wir suchen eine Funktion $F(y,t)$ mit $F_y = a$ und $F_t = b$; das ist hier offensichtlich $F(y,t) = \frac{1}{2}(y^2 + t^2)$. Die Lösungskurven von (1) sind also die Kreise $y(t)^2 + t^2 = r^2$. (Negative Konstanten führen hier offensichtlich zu keiner Lösung.) Die Kreisgleichung kann bekanntlich überall dort eindeutig nach $y(t)$ aufgelöst werden, wo y nicht verschwindet.

Bei (2) ist $a(y,t) = 1 + t^2$ und $b(y,t) = 2ty$, also $y_t = 2t = b_y$, so daß auch diese Gleichung exakt ist. Integration ergibt $F(y,t) = (1+t^2)y$, wir haben also die Lösungskurven $y(t) = \dfrac{C}{1+t^2}$.

Bei (3) ist $a(y,t) = t$ und $b(y,t) = y + e^t$, also $a_t = 1 = b_y$; auch (3) ist also exakt. Hier ist $F(y,t) = ty + e^t$, also haben wir die Lösungen $y(t) = \dfrac{C - e^t}{t}$.

Auch für (4) mit $a(y,t) = te^y + 2y$ und $b(y,t) = e^y$ ist die Exaktheitsbedingung $a_t = b_y$ erfüllt; wir erhalten $F(y,t) = te^y + y^2$, haben also die Lösungskurven $te^{y(t)} + y(t)^2 = C$, wobei C offensichtlich nicht negativ sein kann. Eindeutige Auflösbarkeit liegt nach dem Satz über implizite Funktionen überall dort vor, wo $F_y(y,t) = a(y,t) = te^y + 2y$ nicht verschwindet.

Bei (5) ist $a(y,t) = 8ty\sin 4y^2$ und $b(y,t) = -\cos 4y^2$; Differentiation ergibt $a_t = 8y\sin 4y^2 = b_y$. Integration von b über die darin nicht vorkommende Variable t ergibt $F(y,t) = -t\cos 4y^2 + g(y)$; leiten wir dies ab nach y, sehen wir, daß wir bereits mit $g(y) \equiv 0$ die Funktion a erhalten. Also sind die Lösungskürven gegeben durch $t\cos 4y(t)^2 = C$, was für $t = 0$ zu nichts führt, und für $t \neq 0$ zu $y(t) = \dfrac{1}{4}\sqrt{\arccos\dfrac{C}{t}}$.

Bei (6) schließlich ist $a(y,t) = t\cos y$ und $b(y,t) = \sin y$; offensichtlich ist auch hier $a_t = b_y$ und wir können $F(y,t) = t\sin y$ setzen. Die Lösungskurven sind also $t\sin y(t) = C$, was wieder für $t \neq 0$ aufgelöst werden kann zu $y(t) = \arcsin\dfrac{C}{t}$

e) Dasselbe für die folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{llll} y(t)\sqrt{1-t^2}\,\dot{y}(t) = t & (7) & \big(ty(t) - t\big)\dot{y}(t) + t = 0 & (8) \\ \big(3t + 3 - y(t)\big)\dot{y}(t) + y = 0 & (9) & \big(y(t)^2 - t^2\big)\dot{y}(t) + 2ty(t) = 0 & (10) \end{array}$$

Lösung: Bei (7) ist $a(y,t) = y\sqrt{1-t^2}$ und $b(y,t) = -t$; offensichtlich ist $b_y = 0$ von a_t verschieden; die Differentialgleichung ist also nicht exakt. Die Funktion

$$\frac{b_y - a_t}{a} = -\frac{\frac{yt}{\sqrt{1-t^2}}}{y\sqrt{1-t^2}} = \frac{-t}{1-t^2}$$

allerdings hängt nur von t ab, also führt ihre Stammfunktion $-\ln\sqrt{1-t^2}$ zum integrierenden Faktor

$$e^{-\ln\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,.$$

Multiplizieren wir die Gleichung damit, erhalten wir

$$y(t)\dot{y}(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,,$$

was wir wahlweise als Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen oder als exakte Differentialgleichung lösen können. In beiden Fällen müssen wir vor allem

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\sqrt{1-t^2}$$

berechnen und erhalten dann die Lösung

$$\frac{y^2}{2} = \sqrt{1-t^2} \quad \text{oder} \quad y(t) = \pm\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{1-t^2}\,,$$

wobei das Vorzeichen in allen Punkten mit $y \neq 0$ eindeutig bestimmt ist.

Auch bei (8) mit $a(y,t) = ty - t$ und $b(y,t) = t$ ist $a_t \neq b_y$, aber

$$\frac{b_y - a_t}{a} = \frac{1-y}{ty-t} = -\frac{1}{t}$$

hängt nur von t ab, es gibt also einen integrierenden Faktor

$$e^{-\int\frac{dt}{t}} = e^{-\ln t} = \frac{1}{t}\,.$$

Die damit multiplizierte Gleichung ist

$$\big(y(t)-1\big)\dot{y}(t) + 1 = 0$$

mit Lösung $\frac{1}{2}y(t)^2 - y(t) + t = C$. Durch quadratische Ergänzung erhalten wir

$$\big(y(t)-1\big)^2 + 2t = 2C + 1 \underset{\text{def}}{=} \widetilde{C} \quad \text{oder} \quad y(t) = 1 \pm \sqrt{\widetilde{C} - 2t}\,.$$

Bei (9) ist $a = 3t + 3 - y$ und $b = y$, also $a_t = 3 \neq 1 = b_y$.

$$\frac{b_y - a_t}{a} = \frac{1-3}{3t+3-y}$$

hängt offensichtlich sowohl von t als auch von y ab, es gibt also keinen integrierenden Faktor der Form $\varphi(t)$. Dafür hängt

$$\frac{a_t - b_y}{b} = \frac{3-1}{y} = \frac{2}{y}$$

nur von y ab,

$$\psi(y) = e^{\int\frac{2\,dy}{y}} = e^{2\ln y} = e^{\ln y^2} = y^2$$

ist also ein integrierender Faktor. Nach Multiplikation damit wird die Gleichung zu

$$\big(3t + 3 - y(t)\big)y(t)^2\dot{y}(t) + y(t)^3 = 0\,.$$

Eine Funktion $F(y,t)$ mit $F_y = (3t + 3 - y)y^2 = -y^3 + 3(t+1)y^2$ und $F_t = y^3$ ist offensichtlich $F(y,t) = -\frac{y^4}{4} + (t+1)y^3$; die gesuchten Lösungskurven haben also die

Gleichungen $(t+1-y)y^3 = C$. Sie sind dort eindeutig nach y auflösbar, wo $F_y = (3t+3-y)y^2$ nicht verschwindet, d.h. wo $y \neq 0$ und $y \neq 3t+3$ ist.

Bei (10) schließlich ist $a(y,t) = y^2 - t^2$ und $b(y,t) = 2ty$, also $a_t = -2t \neq 2t = b_y$. Wie in (9) hängt

$$\frac{a_t - b_y}{b} = \frac{-2t-2t}{2ty} = -\frac{2}{y}$$

nur von y ab, wir haben also den integrierenden Faktor

$$e^{-\int \frac{2\,dy}{y}} = e^{-2\ln y} = e^{-\ln y^2} = \frac{1}{y^2}\,.$$

Damit multipliziert wird die Gleichung zu

$$\left(1 - \frac{t^2}{y^2}\right)\dot{y}(t) + \frac{2t}{y(t)} = 0\,,$$

und zu dieser exakten Differentialgleichung findet wir leicht die Stammfunktion $F(y,t) = y + \frac{t^2}{y}$. Die Lösungskurven haben also die Gleichungen

$$y + \frac{t^2}{y} = C \quad \text{oder} \quad y^2 - Cy + t^2 = (y - \tfrac{1}{2}C)^2 = \tfrac{1}{4}C^2 \quad \text{d.h.} \quad y(t) = \frac{C \pm \sqrt{C^2 - 4t}}{2}\,.$$

Wieder gibt es nur bei $y = 0$ Probleme mit der eindeutigen Lösbarkeit.

f) Lösen Sie $\big(ty(t) + t^2 + 1\big)\dot{y}(t) + y(t)^2 + ty(t) + 1 = 0$ mit einem integrierenden Faktor der Form $\varphi(ty)$!

Lösung: Für einen integrierenden Faktor $\varphi(ty)$ muß gelten

$$\frac{\partial\big(a(y,t)\varphi(ty)\big)}{\partial t} = \frac{\partial\big(a(y,t)\varphi(ty)\big)}{\partial y} \quad \text{oder} \quad ay\varphi'(ty) + a_t\varphi(ty) = bt\varphi'(ty) + b_y\varphi(ty)\,.$$

Hier ist $a = ty + t^2 + 1$, also $a_t = y + 2t$, und $b = y^2 + ty + 1$, also $b_y = 2y + t$, und wir haben somit die Bedingung $(ay - bt)\varphi'(ty) = (b_y - a_t)\varphi(ty)$ oder

$$\big(ty^2 + t^2y + y - y^2t - t^2y - t\big)\varphi'(ty) = (2y + t - y - 2t)\varphi'(ty)\,,$$

d.h. $\varphi'(ty) = \varphi(ty)$. Damit sollte $\varphi(ty) = e^{ty}$ ein integrierender Faktor sein, und in der Tat gibt es zu

$$a(y,t)e^{yt} = (ty + t^2 + 1)e^{yt} \quad \text{und} \quad b(y,t)e^{yt} = (y^2 + ty + 1)e^{yt}$$

die Funktion $F(y,t) = (y+t)e^{yt}$, die diese beiden als partielle Ableitungen hat. Die Lösungskurven genügen also den Gleichungen $(y+t)e^{yt} = C$, die überall dort nach y aufgelöst werden können, wo F_y nicht verschwindet, wo also $ty + t^2 + 1 \neq 0$ ist.

g) In einem Ökosystem lebe eine Tierart, die sich nach der logistischen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = \lambda x(t)\big(M - x(t)\big)$ vermehrt. Nun komme eine zweite Art, die dieselben Resourcen nutzt und sich gemäß der Gleichung $\dot{y}(t) = \mu y(t)\big(N - y(t)\big)$ mit $N > M$ vermehrt. Da sich die beiden Arten gegenseitig Resourcen wegnehmen, gelten für das Gesamtsystem nun die Differentialgleichungen $\dot{x}(t) = \lambda x(t)\big(M - x(t) - y(t)\big)$ und $\dot{y}(t) = \mu y(t)\big(N - x(t) - y(t)\big)$. Bestimmen Sie alle Fixpunkte dieses System, und untersuchen Sie deren Stabilität!

Lösung: Für einen Fixpunkt $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ muß gelten

$$\lambda u(M - u - v) = 0 \quad \text{und} \quad \mu v(N - u - v) = 0\,.$$

Damit gibt es die Fixpunkte $(0,0)$, $(0,N)$ und $(M,0)$.

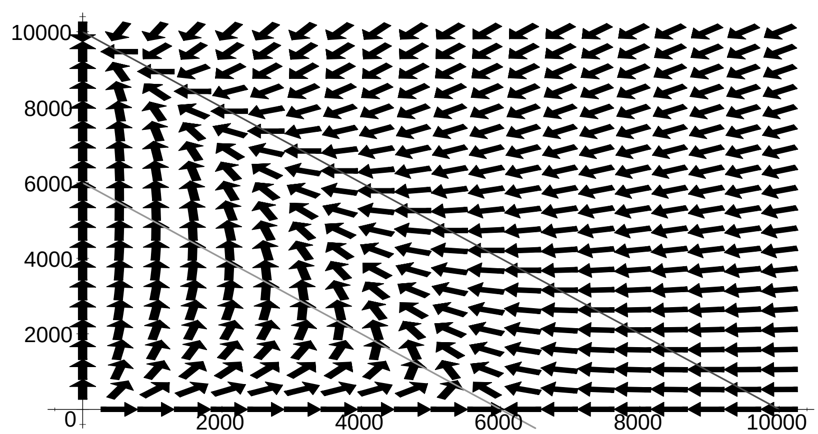
Die JACOBI-Matrix von $F(x,y) = \binom{\lambda x(M-x-y)}{\mu y(N-x-y)}$ ist

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} \lambda(M-2x-y) & -\lambda x \\ -\mu y & \mu(N-x-2y) \end{pmatrix}, \quad J_F(0,0) = \begin{pmatrix} \lambda M & 0 \\ 0 & \mu N \end{pmatrix},$$
$$J_F(0,N) = \begin{pmatrix} \lambda(M-N) & 0 \\ -\mu N & -\mu N \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J_F(M,0) = \begin{pmatrix} -\lambda M & -\lambda M \\ 0 & \mu(N-M) \end{pmatrix}.$$

Da λM und μN positiv sind, ist $(0,0)$ also instabil. Bei $(0,N)$ haben wir die beiden Eigenwerte $-\mu N < 0$ und $\lambda(M-N) < 0$, also ist dieser Punkt stabil. Für $(M,0)$ schließlich ist der Eigenwert $-\lambda M$ negativ, aber $\mu(N-M)$ positiv, das ist also ein Sattelpunkt.

h) Skizzieren Sie grob das Vektorfeld zum obigen Differentialgleichungssystem, und folgern Sie daraus, wie sich das System langfristig entwickeln wird!

Lösung: Für $N = 10\,000$ und $M = 6\,000$ ergibt sich folgendes Bild:



Lösungskurve, die unterhalb der ersten schrägen Geraden beginnen, überqueren diese Gerade, und Lösungskurve, die zwischen den beiden Geraden oder oberhalb der oberen beginnen, gehen gegen $(0,N)$. Die erfolgreichere Art behauptet sich also, die andere stirbt aus.

i) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslösungen des folgenden Systems:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)^2 + y(t)^2 - z(t)^2 \\ \dot{y}(t) &= x(t)^2 - y(t)^2 + z(t)^2 \\ \dot{z}(t) &= -x(t) + y(t)^2 - 2z(t) \end{aligned}$$

Lösung: Wir haben das nichtlineare Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad x^2 - y^2 + z^2 = 0 \quad \text{und} \quad -x + y^2 - 2z = 0\,.$$

Addition der ersten beiden Gleichungen führt auf $x^2 = 0$, also muß x verschwinden und $y = \pm z$. Dies in die dritte Gleichung eingesetzt zeigt, daß $z^2 = 2z$ ist, also $z = 0$ oder $z = 2$ ist. Es gibt also die drei Gleichgewichtslösungen $(0,0,0)$ und $(0,\pm 2,2)$.

j) Zeigen Sie sich, daß der Nullpunkt Fixpunkt der folgenden Systeme ist, und bestimmen Sie jeweils sein Stabilitätsverhalten:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2x(t) + y(t)^2 + x(t)z(t) \\ \dot{y}(t) &= 3x(t)^2 - y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) &= -2x(t)z(t) - y(t) - z(t) \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2x(t) + y(t)^2 + x(t)z(t) \\ \dot{y}(t) &= -3x(t)^2 - y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) &= -2x(t)z(t) - y(t) - z(t) \end{aligned} \tag{12}$$

Lösung: Bei beiden Systemen ist klar, daß $x(t) \equiv y(t) \equiv z(t) \equiv 0$ das System erfüllt, der Nullpunkt ist also eine Gleichgewichtslösung. Die Linearisierung um $(0,0,0)$ erhalten wir einfach durch Weglassen aller nichtlinearer Terme; bei (11) führt das auf

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2x(t) \\ \dot{y}(t) &= -y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) &= -y(t) - z(t) \end{aligned} \tag{11'}$$

Die Matrix dazu ist

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

mit $\det(A - \lambda E) = (-2-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 2)$; die Eigenwerte sind also -2 und $-1 \pm i$. Da alle drei negativen Realteil haben, ist der Nullpunkt stabil. Im Falle von (12) erhalten wir genau dieselbe Linearisierung um den Nullpunkt, also ist dieser auch hier stabil.