

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 29. Januar 2004

a) Bestimmen Sie die sämtlichen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen und diskutieren Sie deren Langzeitverhalten!

$$\dot{y}(t) + 2ty(t) = 4t \quad (1) \qquad \dot{y}(t) + \frac{y(t)}{t} + e^t = 0 \quad (2)$$

$$\dot{y}(t) = a + bt + cy(t) \quad (3) \qquad (1+t)\dot{y}(t) + y(t) + t^2 + t^3 = 0 \quad (4)$$

$$\dot{y}(t) + y(t) = 2 \sin t \quad (5) \qquad \dot{y}(t) + \sin t y(t) = \sin^3 t \quad (6)$$

Lösung: Die homogene Gleichung zu (2) ist

$$\dot{u}(t) + 2tu(t) = 0 \implies \ln u(t) = - \int 2t \, dt = -t^2 + C,$$

also ist $u(t) = e^{-t^2}$ und

$$y(t) = e^{-t^2} \left(\int -4te^{t^2} \, dt \right) = e^{-t^2} (2e^{t^2} + C) = 2 + Ce^{-t^2}.$$

Die homogene Gleichung zu (2) ist

$$\dot{u}(t) + \frac{u(t)}{t} = 0 \implies \ln u(t) = - \int \frac{dt}{t} = - \ln t,$$

also ist $u(t) = C/t$ mit einer beliebigen Konstanten C . Durch partielle Integration finden wir

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{t} \left(\int -te^{-t} \, dt \right) = -\frac{1}{t} \left(te^{-t} + \int e^{-t} \, dt \right) = -\frac{1}{t} (te^{-t} + e^{-t} - C) \\ &= -e^{-t} - \frac{e^{-t}}{t} + \frac{C}{t}. \end{aligned}$$

Im Falle von (3) ist die homogene Gleichung $\dot{u}(t) = cu(t)$ mit Lösung $u(t) = Ce^{ct}$; damit ist

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{ct} \left(\int (a + bt)e^{-ct} \, dt \right) = e^{ct} \left(- \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c^2} + \frac{bt}{c} \right) e^{-ct} + C \right) \\ &= Ce^{ct} - \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c^2} + \frac{bt}{c} \right). \end{aligned}$$

Gleichung (4) müssen wir zunächst durch $(1+t)$ dividieren um die übliche Standardform zu erhalten:

$$\dot{y}(t) + \frac{y(t)}{1+t} = - \frac{t^2 + t^3}{1+t} = -t^2.$$

Die homogene Gleichung ist dann

$$\dot{u}(t) + \frac{u(t)}{1+t} = 0 \implies u(t) = e^{-\int \frac{dt}{1+t}} = e^{-\ln(1+t) + \tilde{C}} = \frac{C}{1+t},$$

und

$$y(t) = -\frac{1}{1+t} \left(\int -t^2(1+t) \, dt \right) = -\frac{t^3/3 + t^4/4}{1+t} + \frac{C}{1+t}.$$

Bei Gleichung (5) sehen wir die allgemeine Lösung Ce^{-t} der homogenen Gleichung auch ohne Rechnung. Die Lösung der Differentialgleichung selbst ist

$$y(t) = 2e^{-t} \left(\int \sin t \cdot e^t dt \right),$$

wobei wir das Integral durch eine zweifache partielle Integration ausrechnen können. (Es ginge natürlich auch über die EULERSchen Formeln.)

$$\int \sin t e^t dt = -\cos t e^t + \int \cos t e^t dt = -\cos t e^t + \sin t e^t - \int \sin t e^t dt,$$

also ist

$$2 \int \sin t e^t dt = (\sin t - \cos t)e^t + C \quad \text{und} \quad y(t) = \sin t - \cos t + Ce^{-t}.$$

Beim letzten Beispiel schließlich hat die homogene Gleichung $\dot{u}(t) + \sin t u(t) = 0$ die Lösung $u(t) = Ce^{\cos t}$ und

$$y(t) = e^{-\cos t} \left(\int \sin^3 t e^{\cos t} dt \right).$$

Setzen wir $x = \cos t$, ist $dx = -\sin t dt$, also

$$\begin{aligned} \int \sin^3 t e^{\cos t} dt &= - \int \sin^2 t e^x dx = - \int (1 - x^2) e^x dx = \int (x^2 - 1) e^x dx, \\ &= (x^2 - 1)e^x - \int 2xe^x dx = (x^2 - 1)e^x - 2xe^x + \int 2e^x dx = (x^2 - 2x + 1)e^x + C \\ &= (\cos^2 t - 2\cos t + 1)e^{\cos t} + C. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$y(t) = \cos^2 t - 2\cos t + 1 + Ce^{-\cos t}.$$

b) Welche der folgenden Anfangswertprobleme sind eindeutig lösbar?

$$\dot{y}(t) = \cos y(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \quad (1)$$

$$2\dot{y}(t)y(t) = 1 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \quad (2)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{5}{3}y(t)^{\frac{2}{5}} \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \quad (3)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\sin t \cdot \cos y(t)}{1 + t^8} \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \quad (4)$$

$$\dot{y}(t)^2 = 4y(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \quad (5)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{y(t)} \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \quad (6)$$

Lösung: Die rechte Seite $\cos y(t)$ von (1) hängt nur von y ab, und die Ableitung $-\sin y$ von $\cos y$ nach y ist überall vom Betrag höchstens eins. Damit haben wir eine LIPSCHITZ-Bedingung (mit LIPSCHITZ-Konstante eins), und die Behauptung folgt aus dem Satz von PICARD-LINDELÖF.

Bei (2) sind $y(t) = \pm\sqrt{t}$ zwei Lösungen – zumindest wenn man für $t = 0$ damit zufrieden ist, daß $\lim_{t \rightarrow 0} 2\dot{y}(t)y(t) = 1$ ist. Eine Lösung mit für $t \rightarrow 0$ beschränkter Ableitung kann es natürlich nicht geben, denn für diese wäre $\dot{y}(0) \cdot y(0) = 0$.

Bei (3) gibt sind sämtliche Funktionen $y(t) = Ct^{5/3}$ Lösungen des Anfangswertproblems.

Bei (4) ist die partielle Ableitung $\frac{-\sin t \cdot \sin y}{1+t^8}$ der rechten Seite nach y beschränkt, so daß wir den Satz von PICARD-LINDELÖF anwenden können; das Anfangswertproblem ist also eindeutig lösbar.

Bei (5) dagegen sind $y(t) = t^2$ und $y(t) = 0$ zwei verschiedene Lösungen.

Bei (6) schließlich ist die partielle Ableitung $\frac{-1}{y^2}$ beschränkt in der Umgebung eines Punktes t mit $y(t) = 1$, also ist zumindest eine lokal eindeutige Lösung garantiert.

c) Finden Sie die allgemeine reelle Lösung der folgenden Differentialgleichungen, und überlegen Sie sich, wo t liegen muß, damit diese Lösungen existieren:

$$\dot{y}(t) = \frac{t^2}{e^{y(t)}} \quad (1) \quad \dot{y}(t) = \frac{e^t}{y(t)^2} \quad (2) \quad \dot{y}(t) = e^{t+y(t)} \quad (3)$$

$$\dot{y}(t) = t^2 y(t)^2 \quad (4) \quad \dot{y}(t) = \frac{t^2}{y(t)^2} \quad (5) \quad \dot{y}(t) = \frac{1+y(t)^2}{1+t^2} \quad (6)$$

Hinweis zu (6): $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

Lösung:

$$\dot{y}(t) = \frac{t^2}{e^{y(t)}} \iff e^{y(t)} \dot{y}(t) dt = t^2 dt \iff \int e^y dy = \int t^2 dt \iff e^y = \frac{t^3}{3} + C,$$

die allgemeine Lösung von (1) ist also $y = \ln\left(\frac{t^3}{3} + C\right)$, und sie existiert für $t > -\sqrt[3]{3C}$.

$$\dot{y}(t) = \frac{e^t}{y(t)^2} \iff \int y(t)^2 \dot{y}(t) dt = \int e^t dt \iff \frac{y(t)^3}{3} = e^t + \tilde{C} \iff y(t) = \sqrt[3]{3e^t + C}$$

mit $C = 3\tilde{C}$. Da die Kubikwurzel \mathbb{R} bijektiv auf sich selbst abbildet, existieren diese Lösungsfunktionen für alle $t \in \mathbb{R}$.

$$\dot{y}(t) = e^{t+y(t)} = e^t \cdot e^{y(t)} \iff \int e^{-y(t)} \dot{y}(t) dt = \int e^t dt \iff -e^{-y(t)} = e^t + \tilde{C}.$$

Die Lösungen von (3) sind also die Funktionen $y(t) = -\ln(C - e^t)$; sie existieren für $C \geq 0$ und $t < \ln C$.

$$\dot{y}(t) = t^2 y(t)^2 \iff \int \frac{\dot{y}(t)}{y(t)^2} = \int t^2 dt \iff -\frac{1}{y} = \frac{t^3}{3} + \tilde{C} \iff y = \frac{-3}{t^3 + C}.$$

Die Lösung existiert nicht im Punkt $t = -\sqrt[3]{C}$ und kann damit auch nicht über diesen Punkt hinaus fortgesetzt werden.

$$\dot{y}(t) = \frac{t^2}{y(t)^2} \iff \int y(t)^2 \dot{y}(t) dt = \int t^2 dt \iff \frac{y(t)^3}{3} = \frac{t^3}{3} + \tilde{C} \iff y(t) = \sqrt[3]{t^3 + C};$$

die Lösung existiert für alle Werte von t .

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = \frac{1+y(t)^2}{1+t^2} &\iff \frac{\dot{y}(t)}{1+y(t)^2} = \frac{1}{1+t^2} \iff \int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dt}{1+t^2} \\ &\iff \arctan y(t) = \arctan t + \tilde{C} \iff y(t) = \tan(\arctan t + \tilde{C}) = \frac{t + \tan \tilde{C}}{1 - t \tan \tilde{C}} \end{aligned}$$

Mit $C = \tan \tilde{C}$ ist also

$$y(t) = \frac{t + C}{1 - Ct}.$$

Die Lösung existiert in allen Intervallen, die den Punkt $t = \frac{1}{C}$ nicht enthalten.

d) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils an, wo die Lösungen existieren:

$$\dot{y}(t) = \frac{t}{y(t)} \quad \text{mit } y(0) = 3 \quad (1)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{t}{y(t)} \quad \text{mit } y(0) = -3 \quad (2)$$

$$\dot{y}(t) = \sin^2 t \cdot \cos^2 y(t) \quad \text{mit } y(0) = \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$\dot{y}(t) = 1 + y(t)^2 \quad \text{mit } y(0) = 0 \quad (4)$$

$$\dot{y}(t) = 1 + y(t)^2 \quad \text{mit } y(0) = 1 \quad (5)$$

$$y(t) \dot{y}(t) + (1 + y(t)^2) \sin t = 0 \quad \text{mit } y(0) = 1 \quad (6)$$

Lösung: Unter der Anfangsbedingung $y(0) = 3$ ist

$$\dot{y}(t) = \frac{t}{y(t)} \iff y(t)\dot{y}(t) = t$$

äquivalent zu

$$\int_3^y \eta \, d\eta = \int_0^t \tau \, d\tau \quad \text{oder} \quad \frac{y^2}{2} - \frac{9}{2} = \frac{t^2}{2}.$$

Multiplikation mit zwei und Auflösen nach y macht daraus $y = \sqrt{9 + t^2}$, denn wegen der Anfangsbedingung $y(0) = 3$ kommt für die Wurzel nur das positive Vorzeichen in Frage.

Bei (2) dagegen ist $y(0) = -3$, so daß wir zwar links ab -3 integrieren, aber für y^2 trotzdem dasselbe Ergebnis bekommen, da $(-3)^2 = 3^2$ ist. Beim Wurzelziehen aber müssen wir jetzt das negative Vorzeichen nehmen, d.h. $y(t) = -\sqrt{9 + t^2}$.

$$\dot{y}(t) = \sin^2 t \cdot \cos^2 y(t) \iff \frac{\dot{y}(t)}{\cos^2 y(t)} = \sin^2 t$$

wird unter der Anfangsbedingung $y(0) = \frac{\pi}{4}$ äquivalent zu

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^y \frac{d\eta}{\cos^2 \eta} = \int_0^t \sin^2 \tau \, d\tau \quad \text{oder} \quad \tan y - \tan \frac{\pi}{4} = \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \sin t \cos t.$$

Da $\pi/4$ im Winkelmaß 45° sind, ist $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, also $y(t) = \arctan \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \sin t \cos t \right)$.

$$\dot{y}(t) = 1 + y(t)^2 \iff \frac{\dot{y}(t)}{1 + y(t)^2} = 1$$

wird unter der Nebenbedingung $y(0) = a$ zu

$$\int_a^y \frac{d\eta}{1 + \eta^2} = \int_0^t d\tau \quad \text{oder} \quad \arctan y - \arctan a = t.$$

Da $\arctan 0 = 0$ und $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ ist, folgt

$$y(t) = \begin{cases} \tan t & \text{für (4)} \\ \tan(t + \frac{\pi}{4}) & \text{für (5)} \end{cases}.$$

$$y(t)\dot{y}(t) + (1 + y(t)^2) \sin t = 0 \iff \frac{y(t)\dot{y}(t)}{1 + y(t)^2} = -\sin t$$

wird unter der Nebenbedingung $y(0) = 1$ äquivalent zu

$$\int_1^y \frac{\eta \, d\eta}{1 + \eta^2} = -\int_0^t \sin \tau \, d\tau \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}((\ln(1 + y^2) - \ln 2) = \cos t - 1.$$

(Beim ersten Integrand ist der zweifache Zähler Ableitung des Nenners.) Damit ist

$$\ln(1 + y(t)^2) = 2 \cos t - 2 + \ln 2 \quad \text{und} \quad y(t) = \sqrt{2e^{2 \cos t - 2} - 1}.$$

- e) 1960 wurde anhand der damals vorliegenden Daten (von drei amerikanischen Elektrotechnikern) vorgeschlagen, daß die Weltbevölkerung $N(t)$ zum Zeitpunkt t gemäß dem Gesetz $\dot{N}(t) = aN(t)^b$ wachsen sollte mit $a > 0$ und $b > 1$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung!

Lösung: Wir schreiben die Gleichung um als $N(t)^{-b}\dot{N}(t) = a$; durch Integration wird daraus

$$\frac{N(t)^{1-b}}{1-b} = at + C \quad \text{oder} \quad N(t)^{1-b} = (at + C)(1-b).$$

Da $1 - b$ negativ ist, $N(t)$ aber für jede realistische Lösung positiv, muß $at + C$ negativ sein. Schreiben wir $C = -at_0$ mit einer neuen Integrationskonstante t_0 , so bekommen wir

$$N(t)^{1-b} = a(b-1)(t_0 - t) \quad \text{und} \quad N(t) = \frac{1}{(a(b-1))^{\frac{1}{b-1}}} \cdot \frac{1}{(t_0 - t)^{\frac{1}{b-1}}},$$

wobei der Exponent $\frac{1}{b-1}$ eine positive Zahl ist.

- f) Diskutieren Sie das qualitative Verhalten der Lösungsfunktionen!

Lösung: Wesentlich ist natürlich nur der zweite Faktor; der erste ist einfach eine Konstante. Offensichtlich geht die Lösung für $t \rightarrow t_0$, also zu einem endlichen Zeitpunkt gegen unendlich; nach diesem Modell wird also die Weltbevölkerung zu einem endlichen Zeitpunkt unendlich groß.

- g) Welche Bedingung muß die Integrationskonstante C mindestens erfüllen, falls diese Gleichung für den gegenwärtigen Zeitpunkt ein realistisches Modell sein sollte?

Lösung: Offensichtlich muß $t_0 > 2004$ sein. Viel Zeit bleibt aber nicht mehr: Nach FOERSTER, MORA und AMIOT ist die beste Schätzung für t_0 Freitag, der 13. November 2026, um 13¹³ Uhr; siehe ihre Arbeit *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026* in Science 138, November 1960, Seite 1291–1295.