

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 15. Januar 2004

- a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$!
- b) Gibt es eine Basis von \mathbb{C}^2 aus *reellen* Eigenvektoren von C ?
- c) Was ist e^C bzw. e^{Ct} ?
- d) Berechnen Sie $e^{\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}}$!
- e) Zeigen Sie: Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist tAA symmetrisch.
- f) Mit welchen komplexen Zahlen a, b, c wird $\begin{pmatrix} 1 & 1+i & a \\ b & 2 & 3-i \\ 1-2i & c & 3 \end{pmatrix}$ eine HERMITESCHE Matrix?
- g) Welche der folgenden Matrizen A_n sind symmetrisch, welche HERMITESCH? Von welchen wissen Sie, daß \mathbb{R}^4 eine Basis aus Eigenvektoren von A_n hat?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \\ 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} i & 2i & 3i & 4i \\ 2i & 3i & 4i & 5i \\ 3i & 4i & 5i & 6i \\ 4i & 5i & 6i & 7i \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -i & i & 1 \\ i & -1 & 1 & -i \\ -i & 1 & 1 & -i \\ 1 & i & i & -1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} i & i & i & i \\ -i & i & -i & i \\ -i & i & i & i \\ -i & -i & -i & i \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

- h) *Richtig oder falsch*: Hat der Hauptraum zum Eigenwert λ die Dimension r , so gibt es mindestens einen Hauptvektor der Stufe r .
- i) *Richtig oder falsch*: Falls es zum Eigenwert λ einen Hauptvektor der Stufe r gibt, hat der Hauptraum mindestens die Dimension r .
- j) *Richtig oder falsch*: Falls die Differenz zweier Hauptvektoren der Stufe r ungleich dem Nullvektor ist, ist sie selbst ein Hauptvektor der Stufe r .
- k) Bestimmen Sie Eigenwerte, Eigenvektoren und Hauptvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}!$$

- l) n sei eine natürliche Zahl. Was ist A^n für die gerade betrachtete Matrix?
- m) Was ist e^{A^t} ?
- n) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2x(t) - 3y(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + 2y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) &= 2x(t) + 2y(t) + z(t)! \end{aligned}$$

- o) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit $x(0) = z(0) = 1$ und $y(0) = 0$!
- p) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit $x(3) = z(3) = 1$ und $y(3) = 0$!
- q) Welche Lösungen des Differentialgleichungssystems bleiben beschränkt für $t \rightarrow \infty$?