Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 18. Dezember 2003

a) Eine ebene Welle der Kreisfrequenz ω_0 treffe auf ein eindimensionales Hindernis mit keilförmiger Durchlässigkeit gemäß der Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{a-|x|}{a} & \text{für } |x| < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Berechnen Sie das (Fraunhofer-)Beugungsbild dieses Hindernisses!

Lösung: Mit der Variablen $u = k \sin\theta$ ist

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}\,dx = \int_{-a}^{a} \frac{a-|x|}{a} e^{-iux}\,dx = \int_{-a}^{0} \frac{a+x}{a} e^{-iux}\,dx + \int_{0}^{a} \frac{a-x}{a} e^{-iux}\,dx \\ &= \int_{-a}^{a} e^{-iux}\,dx + \frac{1}{a}\left(\int_{-a}^{0} xe^{-iux}\,dx - \int_{0}^{a} xe^{-iux}\,dx\right) \end{aligned}$$

xe^{-iux} hat $\dfrac{e^{-iux}}{u^2} - \dfrac{xe^{-iux}}{iu}$ als Stammfunktion; somit ist

$$\begin{aligned} \psi(u) &= -\frac{e^{-iua}+e^{iua}}{iu} + \frac{1-e^{iau}}{au^2} + \frac{e^{iau}}{iu} - \frac{e^{-iau}-1}{au^2} + \frac{e^{iau}}{iu} \\ &= -\frac{e^{iau}+e^{-iau}-2}{au^2} = -\frac{1}{a}\left(\frac{e^{iau/2}-e^{-iau/2}}{u}\right)^2 = \frac{4}{a}\left(\frac{\sin\frac{au}{2}}{u}\right)^2 = \frac{1}{a}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{au}{2}\right). \end{aligned}$$

b) Vergleichen Sie mit dem Beugungsbild eines Spalts der Breite a, insbesondere was die Maxima und Mininma des Bildes betrifft! Können Sie das Ergebnis einfach erklären?

Lösung: Abgesehen von Konstanten haben wir gerade das Quadrat des Beugungsbilds eines solchen Spalts. Für die Helligkeit und damit auch für die Lage der Maxima und Minima muß $\psi\overline{\psi}$ betrachtet werden, und das Quadrat dieser Funktion hat dieselben Nullstellen und Maxima wie $\psi\overline{\psi}$. Der Grund ist natürlich, daß ein Dreiecksimpuls der Breite $2a$ als Faltung eines Rechteckimpulses der Breite a mit sich selbst dargestellt werden kann.

c) In der TEM_{01}-Mode schwingt ein Laserstrahl in erster Näherung wie eine ebene Welle, nur daß die Phase in der rechten Hälfte gegenüber der linken Hälfte um π verschoben ist; die Grenze zwischen den beiden Hälften sei bei $x = 0$, und die Kreisfrequenz sei ω_0. Berechnen Sie das Beugungsbild eines solchen Strahls beim Durchgang durch obigen keilförmigen Spalt!

Lösung: Da $e^{\pi i} = -1$ ist, muß die Durchlässigkeitsfunktion im rechten Teil mit -1 multipliziert werden; insgesamt haben wir es also zu tun mit der Funktion

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{a} & \text{für } -a \le x \le 0 \\ \frac{x-a}{a} & \text{für } \quad 0 \le x \le a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$
\begin{aligned}
\psi(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(x)e^{-iux}\,dx = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} xe^{-iux}\,dx + \int_{-a}^{0} e^{-iux}\,dx - \int_{0}^{a} e^{-iux}\,dx \\
&= \frac{e^{-iua}-e^{iua}}{au^2} - \frac{e^{-iau}+e^{iau}}{iu} - \frac{1-e^{iua}}{iu} + \frac{e^{-iua}-1}{iu} \\
&= \frac{-2i\sin au}{au^2} - \frac{2}{iu} = 2i\left(\frac{1}{u} - \frac{\sin au}{au^2}\right) = \frac{2i}{u}\,\overset{2}{\operatorname{sinc}}\, au\,.
\end{aligned}
$$

d) Berechnen Sie sein Beugungsbild für ein zum Nullpunkt symmetrisches Strichgitter mit

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{2N+1} \delta\left(x - \left(\tfrac{2N+1}{2} - k\right)d\right)\ !
$$

Lösung: Da wir immer noch TEM_{01} betrachten, ist die effektiv zu betrachtende Funktion wieder in der rechten Hälfte negativ zu nehmen; wir rechnen also mit

$$
\begin{aligned}
\widetilde{f}(x) &= \sum_{k=0}^{N} \delta\left(x - \left(\tfrac{2N+1}{2} - k\right)d\right) - \sum_{k=N+1}^{2N+1} \delta\left(x - \left(\tfrac{2N+1}{2} - k\right)d\right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{N} \delta\left(x + \left(\tfrac{1}{2} + \ell\right)d\right) - \sum_{\ell=0}^{N} \delta\left(x - \left(\tfrac{1}{2} + \ell\right)d\right)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\psi(u) &= \sum_{\ell=0}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x + \left(\tfrac{1}{2} + \ell\right)d\right) e^{-iux}\,dx - \sum_{\ell=0}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \left(\tfrac{1}{2} + \ell\right)d\right) e^{-iux}\,dx \\
&= \sum_{\ell=0}^{N} e^{iu(\frac{1}{2}+\ell)d} - \sum_{\ell=0}^{N} e^{-iu(\frac{1}{2}+\ell)d} = e^{iu/2}\sum_{\ell=0}^{N} e^{iu\ell d} - e^{-iu/2}\sum_{\ell=0}^{N} e^{-iu\ell d} \\
&= \frac{e^{iu/2}(1-e^{iu(N+1)d})}{1-e^{iud}} - \frac{e^{-iu/2}(1-e^{-iu(N+1)d})}{1-e^{-iud}} \\
&= \frac{1-e^{iu(N+1)d}}{e^{-iu/2}-e^{iu/2}} - \frac{1-e^{-iu(N+1)d}}{e^{iu/2}-e^{-iu/2}} = \frac{2-e^{iu(N+1)d}-e^{-iu(N+1)d}}{e^{-iu/2}-e^{iu/2}} \\
&= \frac{2-2\cos(N+1)du}{-2i\sin\frac{u}{2}} = i\cdot\frac{1-\cos(N+1)du}{\sin\frac{u}{2}} = 2i\cdot\frac{\sin\frac{(N+1)du}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\,.
\end{aligned}
$$

e) Berechnen Sie sein Beugungsbild beim Auftreffen auf den rechteckigen Spalt mit Durchlässigkeitsfunktion $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x| < a \text{ und } |y| < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$!

Lösung: Wieder müssen wir wegen der TEM_{01}-Mode tatsächlich mit

$$
\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } -a < x < 0 \text{ und } |y| < b \\ -1 & \text{falls } 0 < x < a \text{ und } |y| < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
$$

rechnen. Außerdem muß hier die zweidimensionale FOURIER-Transformation betrachtet werden; mit $u = k\sin\theta$ und $v = k\sin\phi$ ist

$$\begin{aligned}
\psi(u,v) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(x,y)e^{-i(ux+vy)}\,dx\,dy = \int_{-b}^{b}\left(\int_{-a}^{0} e^{-i(ux+vy)}\,dx - \int_{0}^{a} e^{-i(ux+vy)}\,dx\right)dy \\
&= \int_{-b}^{b} e^{-ivy}\left(\int_{-a}^{0} e^{-iux}\,dx - \int_{0}^{a} e^{-iux}\,dx\right)dy = \int_{-b}^{b} e^{-ivy}\left(\frac{e^{iua}-1}{iu} + \frac{e^{-iua}-1}{iu}\right)dy \\
&= \int_{-b}^{b} e^{-ivy}\,\frac{2+e^{iua}+e^{-iua}}{iu}\,dy = \frac{(e^{iua/2}+e^{-iua/2})^2}{iu}\,\frac{e^{ivb}-e^{-ivb}}{iv} \\
&= -\frac{8i}{uv}\cos^2\frac{ua}{2}\sin vb\,.
\end{aligned}$$

f) Ein Student habe zum Zeitpunkt $t = 0$ des Vordiploms seinen maximalen Wissenstand in Höherer Mathematik erreicht. Wenn man davon ausgeht, daß er einen gewissen Bruchteil β davon nie wieder vergißt, erfüllt der Anteil $w(t)$, den er zur Zeit t nach der Prüfung noch beherrscht, nach dem deutschen Psychologen HERMANN EBBINGHAUS (1850–1909) die Differentialgleichung $\dot{w}(t) = -\gamma\big(w(t)-\beta\big)$ mit einem $\gamma \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $w(t)$!

Lösung: Man kann natürlich ausmultiplizieren und die allgemeine Formel aus der Vorlesung anwenden; einfacher ist es aber, die Funktion $y(t) = w(t) - \beta$ zu betrachten. Diese hat dieselbe Ableitung wie $w(t)$, genügt also der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = -\gamma y(t) \quad \text{mit Lösung} \quad y(t) = Ce^{-\gamma t}\,.$$

Also ist $w(t) = \beta + Ce^{-\gamma t}$. Dabei muß die Integrationskonstante C so bestimmt werden, daß $w(0) = \beta + C = 100\%$ ist, d.h. $C = 1 - \beta$.

g) Für einen speziellen Studenten sei $\beta = 10\%$ und $w(1\,\text{Jahr}) = 60\%$. Wieviel hat er (ohne zusätzliches Lernen) bis zum Wiederholungstermin nach einem halben Jahr vergessen?

Lösung: In diesem Fall ist C gleich 90% und $w(t) = 0{,}1 + 0{,}9e^{-\gamma t}$. Außerdem ist, wenn wir die Zeit in Jahren messen,

$$w(1) = 0{,}1 + 0{,}9e^{-\gamma} = 0{,}6 \Longrightarrow e^{-\gamma} = \frac{5}{9} \Longrightarrow \gamma = -\ln\frac{5}{9} \approx 0{,}5877866648\,.$$

Mithin ist

$$w(\tfrac{1}{2}) = 0{,}1 + 0{,}9e^{\frac{1}{2}\ln\frac{5}{9}} = 0{,}1 + 0{,}9e^{\ln\sqrt{\frac{5}{9}}} = 0{,}1 + 0{,}9\sqrt{\tfrac{5}{9}} \approx 0{,}7708203933$$

ungefähr 77%. Er hat also bis zum Wiederholungstermin etwa 23% des Stoffs vergessen.

h) Ein Erwachsener atmet etwa 16 Mal pro Minute je einen halben Liter Luft ein; die ausgeatmete Luft enthält 20% weniger Sauerstoff als die eingeatmete. Angenommen, 30 Studenten sitzen in einem nicht gelüfteten Seminarraum von $40\,m^3$, dessen Luft anfänglich 20% Sauerstoff enthält. Wieviel enthält sie noch nach 90 Minuten?

Lösung: Da die Zahlen ohnehin nur ungefähr stimmen, müssen wir nicht unbedingt mit der hier kleinsmöglichen Zeiteinheit von 1/16 Minute rechnen, sondern können, ohne großen Einfluß auf das Ergebnis, mit vollen Minuten rechnen, wodurch sich angenehmere Zahlen ergeben.

Der Seminarraum enthält $V = 40\,m^3$ Luft, dessen Sauerstoffanteil zur (in Minuten gemessenen) Zeit t gleich $y(t)$ sei. Jede Minute werden

$$30 \times 16 \times \frac{1}{2} = 240$$

Liter Luft eingeatmet; da Tausend Liter gleich einem Kubikmeter sind, ist das $\frac{240}{40000} = \frac{6}{1000}$ des Gesamtvolumens. Vorher war die Sauerstoffmenge $y(t)V$; nachher ist sie

$$\frac{6}{1000} \cdot \frac{8}{10} y(t)V + \frac{994}{1000} y(t)V = \frac{48 + 9940}{10000} y(t)V = \frac{9988}{10000} y(t)V\,,$$

da der Sauerstoffgehalt der nicht eingeatmeten Luft natürlich konstant bleibt. Damit sinkt der Sauerstoffgehalt pro Minute um $\frac{12}{10000} y(t)$, d.h.

$$\dot{y}(t) = -\frac{12}{10000} y(t) \quad \text{und} \quad y(t) = Ce^{-\frac{12}{10000}} y(t)\,.$$

Die Integrationskonstante ist $C = y(0) = 20\%$ und

$$y(90) = \frac{1}{5} e^{\frac{-12 \cdot 90}{10000}} = \frac{1}{5} e^{\frac{-108}{1000}} \approx 0{,}1795255193\,.$$

Der Sauerstoffgehalt ist also auf knapp 18% gesunken.

i) Die stetig differenzierbare Funktion $y(t)$ erfülle die Gleichungen $\dot{y}(t)^2 = 1$ und $y(1) = 0$. Was können Sie über $y(t)$ sagen?

Lösung: Da $y(t)$ stetig differenzierbar ist, ist $\dot{y}(t)$ stetig, muß also entweder konstant gleich eins oder konstant gleich minus eins sein. Damit gibt es die beiden Lösungsklassen $y(t) = \pm t + C$; die Anfangsbedingung $y(1) = 0$ erfüllen

$$y(t) = t - 1 \quad \text{und} \quad y(t) = -t + 1\,.$$

j) Bestimmen Sie für $\lambda_i \in \mathbb{R}$ den Lösungsraum des Differentialgleichungssystems

$$\dot{y}_1(t) = \lambda_1 y_1(t), \quad \dot{y}_2(t) = \lambda_2 y_2(t), \quad \ldots \quad \dot{y}_n(t) = \lambda_n y_n(t)\ !$$

Lösung: Da jede Funktion nur in einer Gleichung vorkommt, ist $y_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}$ mit einer beliebigen Integrationskonstanten C_i; der Lösungsraum besteht also aus allen Funktionen

$$\vec{y}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{beliebig}\,.$$

Insbesondere ist der Lösungsraum n-dimensional.

k) Erraten Sie eine spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = 1 - x(t)$$

und geben Sie dann die allgemeine Lösung dieses Systems an!

Lösung: Wir können z.B. schauen, ob es eine Gleichgewichtslösung gibt, d.h. eine Lösung, bei der beide Funktionen konstant sind. Dann verschwinden die Ableitungen, das System wird also zu

$$0 = y(t) \quad \text{und} \quad 0 = 1 - x(t)\,.$$

Damit ist $x(t) \equiv 1$ und $y(t) \equiv 0$ eine spezielle Lösung.
Für eine beliebige Lösung $\binom{x(t)}{y(t)}$ erfüllt die Differenz $\binom{u(t)}{v(t)}$ zu dieser speziellen Lösung das homogene Gleichungssystem

$$\dot{x}(t) = y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = -x(t)\,.$$

Für jede Lösung ist

$$\ddot{x}(t) = \dot{y}(t) = -x(t), \quad \text{also} \quad \ddot{x}(t) + x(t) = 0\,.$$

Dies ist die wohlbekannte Schwingungsgleichung mit allgemeiner Lösung $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$.
Die allgemeine Lösung der ursprünglichen Gleichung ist also

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t + 1 \\ -C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{pmatrix}.$$

l) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $\dot{y}(t) + y \cdot \sin t = 0$!
(*Hinweis:* Was ist $\frac{d}{dt} \ln y(t)$?)

Lösung:

$$\frac{d}{dt} \ln y(t) = \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = -\sin t \Longrightarrow \ln y(t) = \cos t + C \Longrightarrow y(t) = \widetilde{C} e^{\cos t} \quad \text{mit} \quad \widetilde{C} \in \mathbb{R}\,.$$

(Tatsächlich hätte man natürlich, wie in der Vorlesung bei $\dot{y}(t) = \lambda y(t)$, eine Fallunterscheidung bezüglich des Vorzeichens von $y(t)$ machen müssen; der zweite Folgepfeil oben ist strenggenommen falsch, und $\ln y(t)$ ist *a priori* nicht unbedingt definiert.)