WOLFGANG K. SEILER — A5, ZIMMER C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 11. Dezember 2003

a) Gegeben sei ein trigonometrisches Polynom $f(t)=\sum\limits_{k=-N}^{N} c_k e^{k\cdot i\omega t}$. Was ist die FOURIER-Transformation von f im Distributionensinn? Können Sie diese durch DIRAC-Distributionen ausdrücken?

b) *ditto* für $f(t)=a_0+\sum\limits_{k=1}^{N}\cos k\omega t+\sum\limits_{\ell=1}^{N}\sin \ell\omega t$

c) *ditto* für $f(t)=t$

d) Berechnen Sie für $g_a(t)=\begin{cases}\frac{1}{a} & \text{für } |t|\le\frac{a}{2}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$ und eine stark abfallende Funktion $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ die Integrale

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t)\,dt \quad\text{und}\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\varphi(t)\,dt\,!$$

Ist $\lim\limits_{a\to0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\varphi(t)\,dt$?

e) Berechnen Sie für $f(t)=\begin{cases}-1 & \text{für } t<0\\ 1 & \text{für } t\ge0\end{cases}$ und $g_a(t)$ wie oben die Integrale

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_a(t)f(t)\,dt \quad\text{und}\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)\,dt\,!$$

Ist $\lim\limits_{a\to0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_a(t)f(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)\,dt$?

f) Berechnen Sie für $f(t)=\begin{cases}1 & \text{falls } [t] \text{ gerade}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$ die Ableitung im Distributionensinn! Läßt sie sich durch DIRAC-Distributionen ausdrücken?

g) *ditto* für $g(t)=\begin{cases}1 & \text{für } |t|\le\pi\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$

h) Berechnen Sie für dasselbe g die Faltung $f_i * g$ mit folgenden Funktionen:
$f_1(t)=\sin t,\qquad f_2(t)=\sin^2 t,\qquad f_3(t)=5t+7,\qquad f_4(t)=e^t$

i) Berechnen Sie die Faltungsprodukte $\big(\delta(t)+\delta(t-\frac{\pi}{2})\big)*\sin t$ und $\big(\delta(t)+\delta(t-\pi)\big)*\sin t$!

j) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ quadratintegrierbar ist!

k) Was ist $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$?

l) Zeigen Sie, daß die Frequenzabschätzung aus dem Satz von NYQUIST scharf ist!

m) Berechnen Sie das Faltungsprodukt von $f(x,y)=\sin x\cos y$ mit der zweidimensionalen Distribution $g(x,y)=\big(\delta(x+\frac{\pi}{2})+\delta(x-\frac{\pi}{2})\big)\big(\delta(y+\frac{\pi}{2})-\delta(y-\frac{\pi}{2})\big)$!