

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 13. November 2003

Falls Sie noch Probleme mit der Berechnung von FOURIER-Reihen haben, sind die entsprechenden Beispiele der letzten Woche wichtiger als die meisten der folgenden Themen:

- a) Berechnen Sie die komplexe FOURIER-Reihe der Funktion $f(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{i\omega t}}$ für $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$!
- b) Schließen Sie daraus auf die reelle FOURIER-Reihe der Funktion $f(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{i\omega t}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-i\omega t}}$ für $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$!
- c) Werten Sie die FOURIER-Reihe $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}$ aus an der Stelle $t = \frac{\pi}{4}$ und berechnen Sie den numerischen Wert der entstehenden Summe!
- d) Gibt es eine stückweise stetige periodische Funktion f mit FOURIER-Reihe $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell t}{\sqrt{\ell}}$?
- e) Gibt es eine stückweise stetige periodische Funktion f mit FOURIER-Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{\sqrt{2k+1}}$?
- f) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2+1)^2}$ konvergiert, und finden Sie eine obere Schranke für ihren Grenzwert! (*Hinweis:* Die Reihe $S_f(t) = i \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2+1} e^{ikt}$ ist aus der Vorlesung bekannt als FOURIER-Reihe eines periodisch fortgesetzten Sinus hyperbolicus.)
- g) Finden Sie obere Schranken für $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$!
- h) Die Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien periodisch mit Periode eins, und für $0 \leq t < 1$ sei $f(t) = t$ und $g(t) = t^2$. Was ist $f * g$?
- i) Die Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien periodisch mit Periode eins, und für $-\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2}$ sei $f(t) = t$ und $g(t) = t^2$. Was ist $f * g$?
- j) Zeigen Sie: $\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell} \sin \ell \omega t \right) * \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} p_{\ell} \sin \ell \omega t \right) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k p_k \cos k \omega t$!
- k) Was ist $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k \omega t \right) * \left(\sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos k \omega t \right)$?