Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 16. Oktober 2003

a) Schreiben Sie die Funktion $\sin 2x \cdot \sin 3y$ als Summe von reinen Sinus- und Cosinustermen!

b) In einem Stromkreis sind eine Spule mit Widerstand R und Induktivität L sowie ein Kondensator der Kapazität C parallelgeschaltet. Welche Impedanz hat die Schaltung als ganzes?

c) Zeigen Sie: e^z verschwindet für keine komplexe Zahl z.

d) Zeigen Sie: $e^z = 1$ genau dann, wenn z ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ ist.

e) Betrachten Sie $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ und $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ für beliebige komplexe Argumente $z \in \mathbb{C}$. Wo haben diese Funktionen ihre Nullstellen?

f) Welche der folgenden Funktionen ist holomorph?

$$f(z) = \cosh z, \qquad g(z) = e^z + e^{\overline{z}}, \qquad h(z) = z^2 \sin z$$

g) Berechnen Sie für $\gamma\colon [0,8] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = \begin{cases} (t-1,-1) & \text{für } 0 \le t \le 2 \\ (1,t-3) & \text{für } 2 \le t \le 4 \\ (5-t,1) & \text{für } 4 \le t \le 6 \\ (-1,-t+7) & \text{für } 6 \le t \le 8 \end{cases}$ das Integral $\int_\gamma \vec{V}_k(x,y)\,ds$ für:

$$\vec{V}_1(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \vec{V}_2(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}, \qquad \vec{V}_3(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{V}_4(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ -x^2 \end{pmatrix}!$$

h) Definieren Sie ein Kurvenstück δ, das γ in Gegenrichtung durchläuft!

i) Wie ändern sich die obigen Integrale, wenn man über δ statt über γ integriert?

j) *Richtig oder falsch:* $\gamma\colon [a,b] \to D$ sei eine geschlossene Kurve und $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Falls $\operatorname{rot} \vec{V} = \vec{0}$ auf D, ist $\int_\gamma \vec{V}(x,y)\,ds = 0$.

k) Berechnen Sie die Bogenlänge der Parabel $y = x^2$ zwischen den beiden Punkten $(0,0)$ und $(2,4)$!

l) Berechnen Sie die Länge der Kurve $y = \sinh \frac{x}{a}$ über dem Intervall $[-c,c]$!

m) Der Graph der Funktion $y = f(x)$ über dem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ werde parametrisiert durch $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2;\ t \mapsto \big(t, f(t)\big)$. Unter welchen Bedingungen ist das ein reguläres Kurvenstück?

n) Nun sei $b \ge a \ge 0$, und derselbe Graph werde parametrisiert durch $\widetilde{\gamma}\colon [\sqrt{a}, \sqrt{b}] \to \mathbb{R}^2$; $t \mapsto \big(t^2, f(t^2)\big)$. Sind diese beiden Kurvenstücke äquivalent?

o) Das Vektorfeld $\vec{V}$ sei gegeben durch $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Wege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ durch

$$\gamma_1\colon \begin{cases} [0,20\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto (\cos t, \sin t, t) \end{cases}, \qquad \gamma_2\colon \begin{cases} [0,20\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto (1,0,t) \end{cases}$$

und

$$\gamma_3\colon \begin{cases} [0,20\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto \begin{cases} (\cos 2t, \sin 2t, 0) & \text{falls } t \le 10\pi \\ \big(1,0,2(t-10\pi)\big) & \text{falls } t \ge 10\pi \end{cases} \end{cases}.$$

Berechnen Sie die Integrale von $\vec{V}$ längs der γ_i! Ist das Vektorfeld $\vec{V}$ konservativ?