WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

2. Februar 2004

14. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Bei der exakten Differentialgleichung $a(y,t)\dot y(t) + b(y,t) = 0$ sei $a(y,t)$ überall von null verschieden. Dann geht durch jeden Punkt (t_0, y_0) höchstens eine Lösungskurve.

2) *Richtig oder falsch:* Die Gleichgewichtspunkte eines linearen homogenen Differentialgleichungssystems bilden eine Vektorraum.

3) Welche Fixpunkte hat das System $\dot x(t) = 2x(t) - 5y(t)$ und $\dot y(t) = 10y(t) - 4x(t)$?

4) Ist der Nullpunkt ein stabiler Fixpunkt von $\begin{pmatrix}\dot x(t)\\ \dot y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$?

5) *Richtig oder falsch:* Jedes autonome Differentialgleichungssystem $\dot{\vec y}(t) = F\big(\vec y(t)\big)$ hat mindestens einen Fixpunkt.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*
Finden Sie für die folgenden Differentialgleichungen einen Zusammenhang $F(y,t) = 0$ zwischen y und t. Lösen Sie, falls möglich, *explizit* auf nach y, und untersuchen Sie, falls das nicht geht, wo $F(y,t) = 0$ eine eindeutige Funktion $y = y(t)$ definiert!

a) $\big(t^3 + (1+ty)e^{ty(t)}\big)\dot y(t) + y(t)^2 + 3t^2y(t) = 0$

b) $\big(t\cos y(t) - 2y(t)\big)\dot y(t) + t + \sin y(t) = 0$

c) $t^2 \cos y(t)\dot y(t) = 1 + 3t\sin y(t)$ *Hinweis:* Diese Gleichung wird viel angenehmer, wenn Sie anstelle von $y(t)$ die Funktion $u(t) = \sin y(t)$ betrachten!)

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*
Finden Sie Differentialgleichungen, deren Lösungskurven durch folgende Gleichungen gegeben sind und geben Sie jeweils an, für welche Anfangsbedingungen $y(t_0) = c_0$ die gefundene Differentialgleichung eine eindeutige Lösung hat!

a) $3y^4 - 4t^3 = C$ *b)* $y\cos t + t\sin y = C$

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Untersuchen Sie die Stabilität des Fixpunkts $(0,0)$ des Raubtier-Beutetier-Systems

$$\dot x(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \quad \text{und} \quad \dot y(t) = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t)\,!$$

b) Linearisieren Sie die Raubtier-Beutetier-Gleichung in der Umgebung des anderen Fixpunkts und lösen Sie das linearisierte System. Welche Form haben die Lösungskurven?

c) Das Raubtier-Beutetier-System kann auch benutzt werden zur Beschreibung eines Systems aus einem Nützling (Raubtier) und einem Schädling (Beutetier). Wie verschiebt sich das Gleichgewicht, wenn man durch ein Schädlingsbekämpfungsmittel die Wachstumsrate α der Schädlinge auf ein Zehntel senkt und (wegen der Nebenwirkungen) γ um 10% erhöht?

Abgabe bis zum Montag, dem 9. Februar 2004, um 15.30 Uhr