WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

1. Dezember 2003

8. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist auch $f\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2) Richtig oder falsch: Für $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ liegt auch für jedes $r \in \mathbb{R}$ die Funktion
$g_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f(t)e^{-rt} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$ in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

3) Richtig oder falsch: Für jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$.

4) Richtig oder falsch: Falls für eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gilt $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) \neq 0$, ist $f \notin L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Aufgabe 1: (*5 Punkte*)

a) Was ist $\left\| \dfrac{1}{1+it} \right\|_2$?

b) Berechnen Sie die L^2-Normen der Funktion $f(t) = \dfrac{1}{\cosh t}$ und ihrer FOURIER-Transformierten $\widehat{f}(\omega)$! (*Hinweis:* Aus den kleinen Übungen ist bekannt, daß $1/\cosh t$ im SCHWARTZ-Raum liegt. Außerdem sollten Sie die Ableitung von $\tanh t$ kennen.)

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ habe an der Stelle $t \in \mathbb{R}$ den Wert eins, falls es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $n - \dfrac{1}{2n^2} < t < n + \dfrac{1}{2n^2}$; ansonsten sei $f(t) = 0$.

a) Berechnen Sie, falls es existiert, das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$!

b) Liegt f in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$? Falls ja, was ist $\|f\|_2$?

c) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von f und, falls existent, deren L^2-Norm!

d) Ist f absolut integrierbar?

e) Richtig oder falsch: Zu jeder Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gibt es eine beschränkte Funktion $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, so daß $f - g$ eine Nullfunktion ist.

Aufgabe 3: (*3 Punkte*)

a) Was ist die FOURIER-Transformierte der DIRAC-Distribution Δ_a?

b) Gibt es eine Funktion f, so daß $\widehat{\Delta}_a = T_f$ ist?

c) Was gilt im Spezialfall $a = 0$?

Abgabe bis zum Montag, dem 8. Dezember 2003, um 15.30 Uhr