

17. November 2003

## 6. Übungsblatt Höhere Mathematik II

**Fragen:** (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:*  $V$  sei der Vektorraum aller im Intervall  $[-1, 1]$  durch eine TAYLOR-Reihe um Null darstellbaren Funktionen  $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit Produkt  $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ . Dann bilden die Potenzen  $1, x, x^2, \dots$  ein vollständiges Orthonormalsystem von  $V$ .
- 2) *Richtig oder falsch:* Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  verschwinde für alle  $t < 0$ . Dann gilt für alle  $\omega \in \mathbb{R}$  die Gleichung  $\widehat{f}(\omega) = \mathcal{L}\{f(t)\}(i\omega)$ .
- 3) Was ist  $\mathcal{L}\{\sin(at + b)\}(s)$ ?
- 4) *Richtig oder falsch:* Falls es reelle Zahlen  $c, M$  gibt, so daß  $|f(t)| < Me^{ct}$  ist für alle  $t \geq 0$ , existiert  $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$  für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\Re s > c$ .
- 5) *Richtig oder falsch:* Für  $f(t) = e^{-t^2}$  existiert  $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$  für alle  $s \in \mathbb{C}$ .

**Aufgabe 1:** (4 Punkte)

Die Funktion  $u(x, y)$  sei harmonisch im Gebiet  $x^2 + y^2 < 1$ , und ihr Grenzwert für Punkte  $(x, y)$  mit  $x^2 + y^2 = 1$  sei 1 für  $x > 0$ , und null sonst. Was ist  $u(x, y)$ ?

*Hinweis:*  $\int \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(\varphi-\psi)} d\psi = 2 \arctan\left(\tan\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) \cdot \frac{r+1}{r-1}\right)$ , Unstetigkeit bei  $\varphi - \psi = \pi$ .

**Aufgabe 2:** (5 Punkte)

Für eine periodische Funktion  $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  mit komplexer FOURIER-Reihe  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$

wird  $\kappa = \sqrt{\frac{\sum_{|k|>1} |c_k|^2}{\sum_{|k|>0} |c_k|^2}}$  als *Klirrfaktor* bezeichnet. Berechnen Sie den Klirrfaktor

- a) für eine reine Sinusschwingung
- b) für eine periodischen Rechteckschwingung
- c) für eine Sägezahnschwingung,  
jeweils für die in der Vorlesung behandelte Standardform!

**Aufgabe 3:** (6 Punkte)

Berechnen Sie die FOURIER- und LAPLACE-Transformierten von

- a)  $f(t) = \begin{cases} 4 - t^2 & \text{für } |t| < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- b)  $g(t) = \begin{cases} \cos t & \text{für } |t| < 10\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ .