

13. Oktober 2003

1. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* $\tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$ ist eine holomorphe Funktion.
- 2) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $z \mapsto z|z|$ ist holomorph.
- 3) *Richtig oder falsch:* Jede holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ist konstant.
- 4) Finden Sie eine holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\Re f(x + iy) = u(x, y) = x^2 - y^2$! Ist f eindeutig bestimmt?
- 5) *Richtig oder falsch:* Die holomorphen Funktionen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bilden einen \mathbb{C} -Vektorraum.

Aufgabe 1: (5 Punkte)

- a) Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen der Sinus- und der Cosinusfunktion!
- b) Bestimmen Sie die größte Teilmenge $D_1 \subseteq \mathbb{C}$, auf der $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ als holomorphe Funktion erklärt werden kann, und die größte Teilmenge $D_2 \subseteq \mathbb{C}$, auf der $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ als holomorphe Funktion erklärt werden kann!
- c) Bestimmen Sie die Ableitungen von Tangens und Cotangens auf D_1 bzw. D_2 !

Aufgabe 2: (5 Punkte)

- a) Die Funktion $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sei harmonisch (d.h. $\Delta u \equiv 0$) und mindestens $(n + 2)$ -fach stetig differenzierbar. Zeigen Sie, daß dann auch jede n -te partielle Ableitung von u harmonisch ist!
- b) Für welche $r \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $u: \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^r + \dots + x_n^r \end{cases}$ harmonisch?
- c) Für welche $r \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $u: \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1^2 + \dots + x_n^2)^r \end{cases}$ harmonisch?

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Berechnen Sie für $\gamma: [0, 8] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = \begin{cases} t - 1 - i & \text{für } 0 \leq t \leq 2 \\ it + 1 - 3i & \text{für } 2 \leq t \leq 4 \\ -t + 5 + i & \text{für } 4 \leq t \leq 6 \\ -it - 1 + 7i & \text{für } 6 \leq t \leq 8 \end{cases}$ die folgenden Integrale:

- a) $\int_{\gamma} z \, dz$
- b) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$
- c) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2}$!

Abgabe bis zum Montag, dem 20. Oktober 2003, um 15.30 Uhr