L erhalten wir, wenn wir uns überlegen, welche Funktion diese Matrix hat: Sie gibt an, welche Zeilenoperationen ausgeführt werden. Ist also $\vec{b}$ eine rechte Seite, so ist $L\vec{b}$ die rechte Seite des Gleichungssystem nach Durchführung der Eliminationsschritte. Wenn wir entsprechend neben die Matrix A noch eine Matrix B schreiben und mit dieser alle Zeilenoperationen genauso ausführen wie mit A, so steht nachher rechts die Matrix LB. Speziell für $B = E$ ist dies L selbst, d.h. das algorithmische Verfahren zur Bestimmung der LR-Zerlegung ist gerade die erste Hälfte des Verfahrens zur Bestimmung der inversen Matrix: Wir schreiben die Matrizen A und E nebeneinander und führen die Eliminationsschritte des GAUSS-Algorithmus durch; danach haben wir die Matrizen $LA = R$ und $LE = L$.

Betrachten wir dazu ein konkretes Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} .$$

Hier müssen wir vor der Anwendung des GAUSS-Algorithmus offensichtlich Zeilen vertauschen, z.B. die erste und die zweite. Dies entspricht einer Multiplikation mit

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und führt auf

$$A' = PA = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} .$$

Wir schreiben die Einheitsmatrix daneben:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Sechs links unten wird eliminiert durch Subtraktion der zweifachen ersten Zeile von der letzten:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Endgestalt entsteht daraus, wenn man nun noch die zweite Zeile zur dritten addiert:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hier steht links die Matrix R, rechts steht L, d.h.

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

In der Tat rechnet man leicht nach, daß

$$\begin{aligned} LPA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R \end{aligned}$$

ist.

§5: Euklidische und Hermitesche Vektorräume

In §2*a)* hatten wir, zur Definition von Vektoren im $\mathbb{R}^3$, Pfeile betrachtet und vereinbart, daß zwei Pfeile genau dann den gleichen Vektor darstellen sollen, wenn sie dieselbe Länge und (so diese Länge von Null verschieden ist) dieselbe Richtung haben. In der anschließenden Definition des Vektorraums allerdings kamen Längen und Richtungen nicht mehr vor – aus gutem Grund, denn es fällt in der Tat schwer, sich etwas vorzustellen unter der Länge eines Vektors über dem Körper $\mathbb{F}_{256}$. Über den reellen (und, mit Modifikationen) den komplexen Zahlen aber führen Längen und Richtungen zu interessanten Strukturen, deren Bedeutung weit über die Geometrie hinausgeht: Beispielsweise lassen sich Energie oder Leistung eines Signals oft interpretieren als eine Art Länge in einem unendlichdimensionalen Vektorraum; außerdem spielen solche verallgemeinerte Längen und Richtungen eine wichtige Rolle in der Fehler- und Ausgleichsrechnung sowie in der Statistik. Seit einiger Zeit werden werden Winkel auch bei der Informationssuche angewandt:

Wenn etwa eine Suchmaschine nach den besten Dokumenten zu einer Anfrage sucht, berechnet sie dabei unter anderem die Winkel zwischen einem Dokumentenvektor und einem Anfragevektor – die beide in einem reellen Vektorraum liegen, dessen Dimension einige Millionen beträgt.

a) Längen und Winkel in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Beginnen wir mit leichter vorstellbaren Längen und Winkeln.

Die Länge eines Vektors $\vec{v}$ im $\mathbb{R}^2$ läßt sich leicht nach dem Satz des PYTHAGORAS berechnen: Wir nehmen die beiden Koordinateneinheitsvektoren als Basis und schreiben bezüglich dieser Basis

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Wenn wir den Koordinateneinheitsvektoren, ihrem Namen entsprechend, die Länge eins zuordnen, haben die Vektoren auf der rechten Seite offensichtlich die Längen a und b. Außerdem bilden diese Vektoren zusammen mit dem Vektor $\vec{v}$ ein rechtwinkliges Dreieck; nach PYTHAGORAS erfüllt die Länge c von $\vec{v}$ daher die Gleichung

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{oder} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(Hier sieht man einen der Gründe, warum wir über beliebigen Körpern nicht von Längen sprechen: In Körpern wie $\mathbb{Q}$ existieren Quadratwurzeln nur ausnahmsweise, und in Körpern wie $\mathbb{C}$, in denen sie immer existieren, sind sie nicht eindeutig, da mit c stets auch $-c$ eine Wurzel aus c^2 ist. (Lediglich in Körpern, in denen (wie in $\mathbb{F}_{2^n}$) jedes Element gleich seinem Negativen ist, ist die Wurzel eindeutig.) In $\mathbb{R}$ gibt es zwar auch zwei Quadratwurzeln, aber da $\mathbb{R}$ im Gegensatz etwa zu $\mathbb{C}$ ein angeordneter Körper ist, können wir in konsistenter Weise eine der beiden auszeichnen, nämlich die nichtnegative.)

Für Vektoren im $\mathbb{R}^3$ müssen wir den Satz des PYTHAGORAS zweimal anwenden: Wir schreiben

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \vec{u} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

mit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann bildet $\vec{u}$ zusammen mit den ersten beiden Vielfachen von Einheitsvektoren ein rechtwinkliges Dreieck, seine Länge d erfüllt also die Gleichung $d^2 = a^2 + b^2$. Da der Vektor $\vec{u}$ in der x,y-Ebene liegt, auf der der Vektor mit Komponenten $0, 0, c$ senkrecht steht, bilden auch $\vec{u}, \vec{v}$ und dieser Vektor ein rechtwinkliges Dreieck, so daß für die Länge e von $\vec{v}$ gilt

$$e^2 = d^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad \text{oder} \quad e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

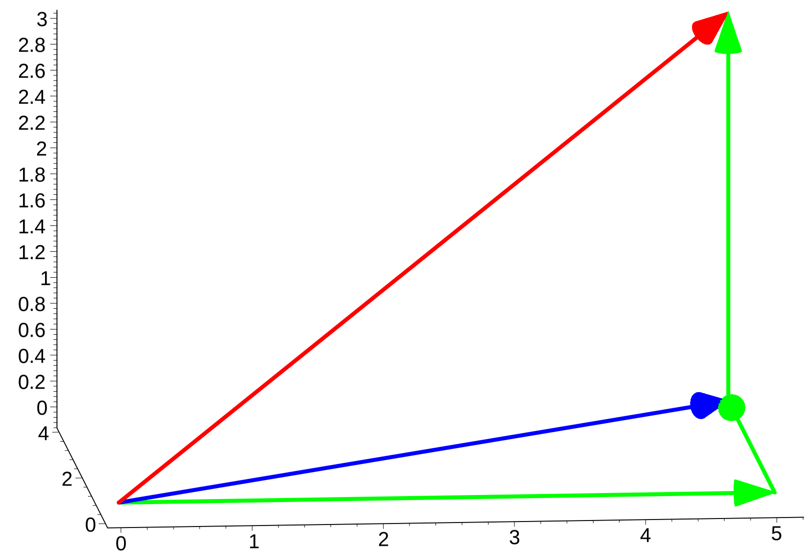

Abb. 13: Längenberechnung im $\mathbb{R}^3$

Längen sind also problemlos berechenbar.

Zur Berechnung von Winkeln verwenden wir das (den meisten wohl bereits aus der Schule bekannte) Skalarprodukt. Es hat seinen Namen daher, daß es zwei Vektoren zu einem *Skalar* verknüpft; dieser wird mit $\vec{v}\cdot\vec{w}$ oder auch kurz $\vec{v}\vec{w}$ bezeichnet. Nach Definition ist

$$\vec{v}\cdot\vec{w} \underset{\text{def}}{=} |\vec{v}|\,|\vec{w}|\cos\measuredangle(\vec{v},\vec{w})\,,$$

wobei Betragsstriche die Länge eines Vektors bezeichnen sollen und $\measuredangle(\vec{v},\vec{w})$ für den Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ steht. Da

$$\cos(2\pi-\varphi)=\cos(-\varphi)=\cos\varphi$$

ist, folgt sofort das *Kommutativgesetz*

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{v}$$

für das Skalarprodukt; außerdem folgt wegen $\cos 0 = 1$, daß

$$\vec{v}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|^2 \quad \text{oder} \quad |\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$

ist. Das Skalarprodukt erlaubt also auch die Berechnung von Längen.

Weiter ist $\cos(\pi/2)=\cos(3\pi/2)=0$ und damit $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$, falls $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufeinander senkrecht stehen; falls keiner der beiden Vektoren der Nullvektor ist, stehen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ *genau dann* senkrecht aufeinander, wenn $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$ ist.

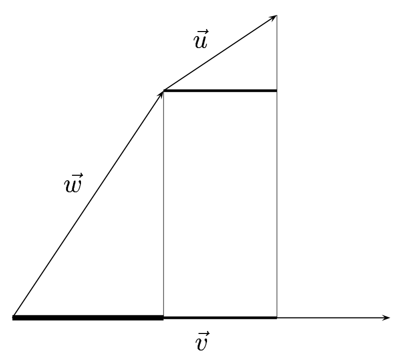

Abb. 14: Geometrische Interpretation des Skalarprodukts

Das Skalarprodukt kann auch geometrisch interpretiert werden: Da der Cosinus eines Winkels gleich Ankathete durch Hypothenuse ist, zeigt Abbildung 14, daß $|\vec{w}|\cos\measuredangle(\vec{v},\vec{w})$ gerade die Länge des senkrecht auf die von $\vec{v}$ erzeugte Gerade projizierten Vektors $\vec{w}$ ist; in der Zeichnung ist dies die fett eingezeichnete Strecke.

Addieren wir zu $\vec{w}$ einen weiteren Vektor $\vec{u}$, so ist auch hier wieder $|\vec{u}|\cos\measuredangle(\vec{v},\vec{u})$ die (in Abbildung 14 halbfett eingezeichnete) Länge des auf die von $\vec{v}$ erzeugte Gerade projizierten Vektors $\vec{u}$ und entsprechendes gilt für $\vec{w}+\vec{u}$; wir erhalten somit die Regel

$$\vec{v}\cdot(\vec{w}+\vec{u})=\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{u}\,,$$

und damit wegen des Kommutativgesetzes auch

$$(\vec{v}+\vec{w})\cdot\vec{u}=\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{u}\,.$$

Zum Berechnen des Skalarprodukts ist die bisherige Definition für viele Fälle recht unhandlich, da Vektoren oft in einer solchen Weise gegeben sind, daß man den Winkel zwischen ihnen *nicht* ohne weiteres kennt. Um gut rechnen zu können, wählen wir eine Basis aus drei paarweise aufeinander senkrecht stehenden Vektoren $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ der Länge eins. Für diese Vektoren läßt sich das Skalarprodukt leicht ausrechnen: Da zwei verschiedene stets aufeinander senkrecht stehen und jeder einzelne die Länge eins hat, ist

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & \text{falls } i\neq j\\ 1 & \text{falls } i=j\end{cases}.$$

(δ_{ij} ist das aus §2 bekannte KRONECKER-δ)

Für zwei Vektoren

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} \quad\text{und}\quad \vec{w}=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$$

ist dann

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=(v_1\vec{e}_1+v_2\vec{e}_2+v_3\vec{e}_3)\cdot(w_1\vec{e}_1+w_2\vec{e}_2+w_3\vec{e}_3)\,,$$

und nach obigen Rechenregeln läßt sich dies berechnen als

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}v_iw_j\,\vec{e}_i\vec{e}_j=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}v_iw_j\delta_{ij}=\sum_{i=1}^{3}v_iw_i\,.$$

In dieser Form werden Skalarprodukte meistens ausgerechnet, und wir können aus dem Ergebnis rückwärts den Winkel zwischen den beiden Faktoren bestimmen, denn nach der ursprünglichen Definition des Skalarprodukt ist

$$\cos\measuredangle(\vec v,\vec w)=\frac{\vec v\cdot\vec w}{|\vec v|\cdot|\vec w|}=\frac{\vec v\cdot\vec w}{\sqrt{(\vec v\cdot\vec v)(\vec w\cdot\vec w)}}\,.$$

Da wir nur den Cosinus des Winkels kennen, ist dieser nur bis auf Vielfache von 180° im Gradmaß *bzw.* π im Bogenmaß bestimmt, aber mehr ist im Dreidimensionalen ohnehin nicht sinnvoll: Für Vektoren in der Ebene unterscheiden wir zwei entgegengesetzt gleiche Winkel α und $-\alpha$ dadurch, daß wir den Gegenuhrzeigersinn als mathematisch positiv auszeichnen. Im $\mathbb{R}^3$ aber können wir die Uhr auf zwei Arten in die von zwei Vektoren aufgespannte Ebene legen: mit dem Ziffernblatt nach „oben“ oder nach „unten“, wobei wir diese Begriffe nicht konsistent unterscheiden können. Damit entfällt die Unterscheidung zwischen α und $-\alpha$.

b) Euklidische Vektorräume

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, daß das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ eng mit Längen und Winkeln zusammenhängt; da dies zwei der Grundbegriffe der EUKLIDischen Geometrie sind, werden wir reelle Vektorräume mit Skalarprodukt allgemein als EUKLIDische Vektorräume bezeichnen.

Wir beginnen mit einem etwas schwächeren Begriff als dem des Skalarprodukts, der sich im Gegensatz zu letzterem noch für Vektorräume über beliebigen Körpern definieren läßt:

Definition: Eine *symmetrische Bilinearform* auf dem k-Vektorraum V ist eine Abbildung $\cdot : V\times V\to k$ mit folgenden Eigenschaften:
a) $\cdot$ ist *bilinear,* d.h.

$$(\lambda\vec v_1+\mu\vec v_2)\cdot\vec w=\lambda(\vec v_1\cdot\vec w)+\mu(\vec v_2\cdot\vec w)\qquad\text{und}$$
$$\vec v\cdot(\lambda\vec w_1+\mu\vec w_2)=\lambda(\vec v\cdot\vec w_1)+\mu(\vec v\cdot\vec w_2)$$

für alle $\vec v_1,\vec v_2,\vec w,\vec w_1,\vec w_2\in V$ und $\lambda,\mu\in k$.
b) $\cdot$ ist *symmetrisch,* d.h. $\vec v\cdot\vec w=\vec w\cdot\vec v$ für alle $\vec v,\vec w\in V$.

Die Skalarprodukte in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sind natürlich symmetrische Bilinearformen im Sinne dieser Definition; allgemeiner wird für jeden $\mathbb{R}^n$ durch

$$\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}=v_1w_1+\cdots+v_nw_n$$

eine Bilinearform definiert.

Noch allgemeiner erklärt diese Formel auch für die Vektorräume k^n über einem beliebigen Körper k eine symmetrische Bilinearform, die auch für (nach unserem derzeitigen Kenntnisstand) eher exotische Körper durchaus nützliche Anwendungen haben kann: Ist etwa $\mathbb{F}_2=\{0,1\}$ der Körper mit zwei Elementen (in dem Addition und Multiplikation modulo zwei definiert sind), so ist das Produkt eines Vektors $\vec v\in\mathbb{F}_2^n$ mit dem Vektor, dessen sämtliche Komponenten gleich eins sind, genau dann gleich null, wenn die Anzahl der Einsen im Vektor $\vec v$ gerade ist; ansonsten ist es null. Auf diese Weise läßt sich also eine Paritätsprüfung einfach und kompakt formulieren. Wenn man außer dem Vektor mit lauter Einsen als Komponenten noch weitere geeignete Vektoren wählt, lassen sich nicht nur Paritätsfehler, sondern auch noch andere Fehler erkennen und eventuell sogar korrigieren.

Verglichen mit dem Skalarprodukt, wie wir es aus $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ gewohnt sind, fehlt diesen Bilinearformen jedoch eine wesentliche Eigenschaft: In $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ ist das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst gleich dem Quadrat der Länge und verschwindet somit genau dann, wenn der Vektor gleich dem Nullvektor ist. Dies gilt auch für die gerade definierte Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$, denn

$$\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}=v_1^2+\cdots+v_n^2$$

verschwindet als Summe von Quadraten genau dann, wenn jedes einzelne v_i verschwindet.

Über dem Körper $\mathbb{F}_2$ dagegen ist beispielsweise

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = 1^2+0^2+1^2+0^2 = 1+1 = 0\,,$$

und auch über den komplexen Zahlen ist etwa in $\mathbb{C}^2$

$$\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} = 1^2+i^2 = 1-1 = 0\,.$$

Auch über den reellen Zahlen lassen sich Bilinearformen finden, für die das Produkt eines Vektors mit sich selbst verschwinden kann, ohne daß der Vektor gleich dem Nullvektor sein müste: Für die Bilinearform

$$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\star\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix} \underset{\text{def}}{=} v_1w_1 - v_2w_2$$

etwa ist

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\star\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1^2-1^2 = 0\,.$$

Da wir im $\mathbb{R}^n$ (und später auch in allgemeineren Räumen) Längen und Abstände definieren wollen, um so auch dort analytische Grundbegriffe wie Konvergenz und Stetigkeit einführen zu können, müssen wir solche Bilinearformen ausschließen: Abstände dürfen nicht negativ sein, und der Abstand zwischen zwei Punkten soll nur dann verschwinden, wenn beide Punkte gleich sind.

Da man in beliebigen Körpern nicht von Positivität und Negativität reden kann, beschränken wir uns ab jetzt auf den Fall $k=\mathbb{R}$ und definieren:

Definition: *a)* Eine Bilinearform $V\times V\to\mathbb{R}$ auf einem reellen Vektorraum V heißt *positiv semidefinit*, wenn

$$\vec v\cdot\vec v\ge 0 \quad \text{für alle } \vec v\in V\,;$$

sie heißt *positiv definit* oder *Skalarprodukt*, wenn zusätzlich gilt

$$\vec v\cdot\vec v = 0 \Rightarrow \vec v = \vec 0\,.$$

b) Ein EUKLIDischer Vektorraum ist ein Paar $(V,\cdot)$ bestehend aus einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V und einem Skalarprodukt $\cdot : V\times V\to\mathbb{R}$.

Wie bei Produkten üblich, werden wir den Malpunkt oft weglassen. Gelegentlich, wenn Verwechslungen mit anderen Produkten zu befürchten sind, werden wir anstelle von $\vec v\cdot\vec w$ auch $(\vec v,\,\vec w)$ schreiben; in der Literatur findet man manchmal auch die Schreibweise $\langle\vec v,\,\vec w\rangle$.

Typisches Beispiel eines EUKLIDischen Vektorraums ist natürlich der $\mathbb{R}^n$ mit seinem Standardskalarprodukt

$$\begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}w_1\\\vdots\\w_n\end{pmatrix} = v_1w_1+\cdots+v_nw_n\,.$$

Ein anderes Beispiel ist der Raum $C^0([0,\,1],\,\mathbb{R})$ aller stetiger Funktionen vom Einheitsintervall $[0,\,1]$ nach $\mathbb{R}$ mit dem Skalarprodukt

$$(f,\,g)\underset{\text{def}}{=}\int_0^1 f(t)g(t)\,dt\,.$$

(Dies ist ein typischer Fall, wo die Klammerschreibweise vorzuziehen ist, denn $f\cdot g$ ist bereits vergeben für die Funktion, die jedem $t\in[0,\,1]$ den Wert $f(t)\cdot g(t)$ zuordnet.)

Die Bilinearität des so definierten Produkts ist klar; außerdem ist es offensichtlich positiv semidefinit:

$$(f,\,f) = \int_0^1 f(t)^2\,dt \ge 0\,,$$

da der Integrand nirgends negativ wird. Falls f nicht identisch verschwindet, gibt es einen Punkt $t_0\in(0,\,1)$ mit $f(t_0)=h\neq 0$. Wegen der Stetigkeit von f gibt es dazu eine Umgebung $(a,\,b)$, so daß $|f(t)|>h/2$ für $t\in(a,\,b)$. Damit ist

$$(f,\,f) = \int_0^1 f(t)^2\,dt \ge \int_a^b f(t)^2\,dt > \int_a^b \frac{h^2}{4}\,dt = \frac{h^2}{4}(b-a) > 0\,,$$

$(f,\,f)=0$ ist also nur möglich, wenn f überall verschwindet.

Man beachte, daß hier die Stetigkeit von f eine wesentliche Rolle spielt: Für die Funktion f, die überall verschwindet außer im Punkt $1/2$, wo sie den Wert 1 annimmt, ist das Integral über $f(t)^2$ gleich null, obwohl die Funktion nicht die Nullfunktion ist.

Da wir EUKLIDische Vektorräume eingeführt haben, um dort so etwas wie EUKLIDische Geometrie zu betreiben, sollten wir als nächstes deren Grundbegriffe definieren:

Definition: *a)* Die Länge eines Vektors $\vec v$ aus einem EUKLIDischen Vektorraum V ist $\|\vec v\| = \sqrt{\vec v \cdot \vec v}$.
b) Der Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec v, \vec w \in V \setminus \{\vec 0\}$ ist

$$\measuredangle(\vec v, \vec w) = \arccos\left(\frac{\vec v \cdot \vec w}{\sqrt{(\vec v \cdot \vec v)(\vec w \cdot \vec w)}}\right) .$$

Da der Arkuscosinus nur Werte zwischen null und π annimmt, im Gradmaß also zwischen 0° und 180°, ist der so definierte Winkel *unorientiert.*

Wir sollten uns allerdings die Frage stellen, ob hiermit *überhaupt* ein Winkel erklärt ist: Da der Cosinus nur Werte zwischen -1 und 1 annimmt, ist das offensichtlich nur dann der Fall, wenn das Argument des Arkuskosinus in obiger Definition höchstens den Betrag eins hat.

Für das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ ist das kein Problem: Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ hatten wir im vorigen Abschnitt *definiert* als Produkt aus den Längen der beiden Vektoren und dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels; wir hatten dann nachgerechnet, daß dies mit der Koordinatendefinition des hier definierten Skalarprodukts übereinstimmt.

Da zwei Vektoren stets eine Ebene aufspannen, sollten wir erwarten, daß Entsprechendes auch für beliebige reelle Vektorräume gilt, was auch in der Tat der Fall ist. Mit dem Beweis wollen wir allerdings noch warten bis zum übernächsten Abschnitt, wo wir ohne nennenswerten zusätzlichen Aufwand gleich auch noch eine ähnliche Formel für komplexe Vektorräume beweisen können.

Für EUKLIDische Vektorräume wie $\mathcal{C}^0\big([0,\ 1], \mathbb{R}\big)$ ist die „Länge“ eines „Vektors“ natürlich nichts mehr, was man sich geometrisch anschaulich vorstellen könnte; trotzdem ist sie oft eine nützliche Größe. Eine stetige Funktion $I\colon [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ könnte beispielsweise einen zeitabhängigen Strom beschreiben, der durch einen Widerstand R fließt; nach dem OHMschen Gesetz fällt dort eine Spannung $U(t) = R \cdot I(t)$ ab, so daß die elektrische Leistung gleich $U(t) \cdot I(t) = R \cdot I(t)^2$ ist. Die elektrische Arbeit, die während des Zeitraums $[0,\ 1]$ verrichtet wird, ist daher gleich

$$\int_0^1 U(t) \cdot I(t)\,dt = \int_0^1 R \cdot I(t)^2\,dt = R \cdot \int_0^1 I(t)^2\,dt = R \cdot \|I\| ,$$

d.h. die „Länge“ von I ist bis auf einen konstanten Faktor gerade gleich der Energie des Signals I.

Ähnliche physikalische Interpretationen gibt es bei fast allen Anwendungen von Vektorräumen, deren Elemente Funktionen sind.

c) Hermitesche Vektorräume

Die unmittelbare Verallgemeinerung des Skalarprodukts des $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{C}^n$ ist nicht sonderlich nützlich: Dann hätten wir nämlich zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + i \cdot i = 0 .$$

Solche Vektoren mit Quadrat Null sind zwar in einigen Anwendungen (wie etwa der speziellen Relativitätstheorie) durchaus sinnvoll und nützlich, meist möchte man aber das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst als Quadrat seiner Länge interpretieren, und die sollte für alle Vektoren außer dem Nullvektor positiv sein.

Wir haben bereits jeder komplexen Zahl ungleich Null eine positive reelle Zahl zugeordnet, nämlich ihren Betrag

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} .$$

Entsprechend können wir zwei komplexen Vektoren

$$\vec v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

aus $\mathbb{C}^n$ das Produkt

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \sum_{\ell=1}^{n} v_\ell \overline{w_\ell}$$

zuordnen. Auch hier ist offensichtlich $\vec{v}\cdot\vec{v}$ für jeden Vektor außer dem Nullvektor eine positive reelle Zahl, denn wir addieren ja die Betragsquadrate der Komponenten des Vektors.

Dieses Produkt erfüllt nun allerdings nicht mehr die Forderungen aus der Definition eines Skalarprodukts: Es ist zwar noch linear im ersten Argument, nicht mehr aber im zweiten, denn schon bei Multiplikation des zweiten Vektors mit einer komplexen Zahl $\lambda \notin \mathbb{R}$ ist

$$\vec{v}\cdot(\lambda\vec{w}) = \sum_{\ell=1}^{n} v_\ell \cdot \overline{\lambda w_\ell} = \overline{\lambda}\cdot\sum_{\ell=1}^{n} v_\ell\overline{w_\ell} = \overline{\lambda}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w}) \neq \lambda\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})\,.$$

Bezüglich der Addition gibt es keine Probleme; somit wird die Linearitätsregel für das zweite Argument zu

$$\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}) = \overline{\lambda}\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \overline{\mu}\cdot(\vec{u}\cdot\vec{w})\,.$$

Die Symmetriebedingung ist ebenfalls verletzt, denn schon für zwei komplexe Zahlen z und w ist das Produkt $z\overline{w} = \overline{w}z = \overline{w\overline{z}}$ im allgemeinen verschieden von $w\overline{z}$, und entsprechend ist auch für zwei Vektoren

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \overline{\vec{w}\cdot\vec{v}}\,.$$

Der Begriff des HERMITEschen Vektorraums formalisiert diese Eigenschaften:

Definition: Ein HERMITEscher Vektorraum ist ein Paar $(V,\cdot)$ bestehend aus einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V und einer Abbildung

$$\cdot : V\times V \to \mathbb{C};\quad (\vec{v},\vec{w}) \mapsto \vec{v}\cdot\vec{w}$$

mit folgenden Eigenschaften:

a) $\cdot$ ist linear im ersten Argument, d.h.

$$(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\cdot\vec{w} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{w}) + \mu(\vec{v}\cdot\vec{w})$$

für alle $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$ und $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$.

b) $\cdot$ ist HERMITEsch symmetrisch, d.h.

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \overline{\vec{w}\cdot\vec{v}}$$

für alle $\vec{v},\vec{w}\in V$.

c) $\cdot$ ist positiv definit, d.h.

$$\vec{v}\cdot\vec{v} > 0$$

ist eine positive *reelle* Zahl für alle Vektoren $\vec{v}\neq\vec{0}$ aus V.

Die bilineare Abbildung $\cdot$ heißt HERMITE*sches Skalarprodukt;* auch hier werden wir den Malpunkt nicht immer hinschreiben und bei Verwechslungsgefahr mit anderen Produkten auch gelegentlich $(\vec{v},\vec{w})$ anstelle von $\vec{v}\cdot\vec{w}$ schreiben.

CHARLES HERMITE (1822–1901) war einer der bedeutendsten Mathematiker des neunzehnten Jahrhunderts. Zu seinen Resultaten zählen eine Vereinfachung des ABELschen Beweises, daß Gleichungen fünften Grades im allgemeinen nicht durch Wurzelausdrücke gelöst werden können, die explizite Lösung solcher Gleichungen durch elliptische Funktionen, der Nachweis, daß e eine transzendente Zahl ist, also keiner algebraischen Gleichung über $\mathbb{Q}$ genügt, eine Interpolationsformel und vieles mehr. HERMITE galt als ein sehr guter akademischer Lehrer; er unterrichtete an der École Polytechnique, dem Collège de France, der École Normale Supérieure und der Sorbonne.

Durch Kombination der Eigenschaften *a)* und *b)* kann man leicht ausrechnen, was anstelle der Linearität für das zweite Argument gilt: Genau wie im obigen Beispiel ist

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}) &= \overline{(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w})\cdot\vec{u}} = \overline{\lambda(\vec{v}\cdot\vec{u})+\mu(\vec{w}\cdot\vec{u})}\\ &= \overline{\lambda}\,\overline{(\vec{v}\cdot\vec{u})} + \overline{\mu}\,\overline{(\vec{w}\cdot\vec{u})} = \overline{\lambda}\,(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \overline{\mu}\,(\vec{u}\cdot\vec{w})\,.\end{aligned}$$

Diese Eigenschaft, zusammen mit der Linearität im ersten Argument, bezeichnet man gelegentlich als *Sesquilinearität,* d.h. „anderthalbfache Linearität“, im Gegensatz zur echten Linearität in zwei Argumenten, der *Bilinearität.*

Typisches Beispiel eines HERMITEschen Vektorraums ist der $\mathbb{C}^n$ mit dem eingangs definierten Produkt, jedoch wird sich im nächsten Semester zeigen, daß gerade HERMITEsche Vektorräume von komplexwertigen Funktionen sehr interessante Anwendungen haben.

Hier sei nur als Beispiel für das Rechnen mit HERMITEschen Skalarprodukten in $\mathbb{C}^n$ gezeigt, mit dem wir auch nochmals das Rechnen mit Matrizen wiederholen können, und zwar geht es um ein Verfahren von G. PHILIPPE, veröffentlicht in *Quadrature,* Oct.-Déc. 2000, S. 23–34, wie man aus komplexen Vektoren reelle quadratische Matrizen A, B definieren kann, für die $AB = -BA$ ist, die also *antikommutieren.*

Dazu betrachten wir einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$, wobei $\mathbb{C}^n$ sein Standard-HERMITEsches Produkt habe. Zu den Komponenten v_i von $\vec{v}$ betrachten wir die $n \times n$-Matrix W mit Einträgen $w_{ij} = v_i\overline{v_j}$ und die Matrix

$$M = a \cdot E - 2W \quad \text{mit} \quad a = \vec{v} \cdot \vec{v}\,.$$

Da aE als Diagonalmatrix mit W kommutiert, ist

$$M^2 = a^2E - 4aW + 4W^2\,.$$

Der Eintrag an der Stelle ik von W^2 ist

$$\sum_{j=1}^n w_{ij}w_{jk} = \sum_{j=1}^n v_i\overline{v_j} \cdot v_j\overline{v_k} = v_i\overline{v}_k \sum_{j=1}^n v_j\overline{v_j} = w_{ik}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = aw_{ik}\,,$$

d.h. $M^2 = a^2E$.

Bezeichen A und B die reellen $n \times n$-Matrizen aus den Real- und Imaginärteilen von M, ist also $M = A + iB$, so ist demnach

$$(A + iB)^2 = A^2 - B^2 + i(AB + BA) = a^2E$$

eine reelle Matrix, der Imaginärteil $AB + BA$ muß also verschwinden. Das ist aber gleichbedeutend damit, daß $AB = -BA$ ist.

Als Beispiel betrachten wir den Vektor $\binom{1}{i}$ aus $\mathbb{C}^2$. Hier ist $a = 2$ und

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und in der Tat ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -E \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = E\,.$$

Kompliziertere Vektoren $\vec{v}$ führen zu interessanteren Beispielen.

Auch in HERMITEschen Vektorräumen werden wir $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ gelegentlich als *Länge* des Vektors $\vec{v}$ bezeichnen; auf die Definition von Winkeln hingegen wollen wir verzichten, da die Übernahme der entsprechenden Definition für EUKLIDische Vektorräume hier auf geometrisch nicht sinnvolle komplexe Winkel führen würde.

Ansonsten können und werden wir EUKLIDische und HERMITEsche Vektorräume im folgenden gleichzeitig behandeln: Ersetzt man in der Definition eines HERMITEschen Vektorraums überall $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$, so erhält man einen EUKLIDischen Vektorraum. Zwar stehen noch an vielen Stellen die Querstriche für komplexe Konjugation, aber da sich eine reelle Zahl unter komplexer Konjugation nicht ändert, sind die Konjugationsstriche nur überflüssig, nicht schädlich.

d) Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Als erstes Beispiel wollen wir das noch offene Problem aus Abschnitt *b)* lösen und zeigen, daß die Zahl, die wir dort als Cosinus eines Winkels definiert hatten, tatsächlich zwischen null und eins liegt. Natürlich zeigen wir dies gleich etwas allgemeiner so, daß wir auch eine Aussage für HERMITEsche Vektorräume bekommen, und wir verallgemeinern auch gleich noch etwas weiter in Hinblick auf die Tatsache, daß wir in Vektorräumen, die auch unstetige Funktionen enthalten, im allgemeinen kein wirkliches Skalar- *bzw.* HERMITEsches Produkt haben. Trotzdem werden Produkte in solchen Vektorräumen im nächsten Semester für die FOURIER-Theorie sehr nützlich sein.

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: Für $k = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sei auf dem k-Vektorraum V eine Abbildung $\cdot: V \times V \to k;\ (f, g) \mapsto f \cdot g$ gegeben mit den Eigenschaften
a) $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \mu(\vec{v} \cdot \vec{w})$
b) $\vec{w} \cdot \vec{v} = \overline{\vec{v} \cdot \vec{w}}$
c) $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$ für alle $\vec{v} \in V$.
Dann ist für alle Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in V$

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|\,.$$

(Man beachte, daß hier nicht gefordert wird, daß $\vec v \cdot \vec v > 0$ für $\vec v \neq \vec 0$.)

Der *Beweis* beruht auf folgendem Trick: Wegen *c)* ist für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}(\lambda\vec v + \mu\vec w)\cdot(\lambda\vec v + \mu\vec w) &= \lambda\overline{\lambda}\,\vec v\cdot\vec v + \lambda\overline{\mu}\,\vec v\cdot\vec w + \mu\overline{\lambda}\,\vec w\cdot\vec v + \mu\overline{\mu}\,\vec w\cdot\vec w \\ &= \lambda\overline{\lambda}\,\vec v\cdot\vec v + \lambda\overline{\mu}\,\vec v\cdot\vec w + \overline{\lambda}\mu\,\overline{\vec v\cdot\vec w} + \mu\overline{\mu}\,\vec w\cdot\vec w\end{aligned}$$

stets nichtnegativ. Speziell für $\lambda = (\vec w\cdot\vec w) \in \mathbb{R}$ und $\mu = -(\vec v\cdot\vec w)$ erhalten wir

$$(\vec w\cdot\vec w)^2(\vec v\cdot\vec v) - 2(\vec w\cdot\vec w)(\overline{\vec v\cdot\vec w})(\vec v\cdot\vec w) + (\vec v\cdot\vec w)(\overline{\vec v\cdot\vec w})(\vec w\cdot\vec w) \geq 0\,,$$

also

$$(\vec w\cdot\vec w)\big((\vec w\cdot\vec w)(\vec v\cdot\vec v) - |\vec v\cdot\vec w|^2\big) \geq 0\,.$$

Ist hier $\vec w\cdot\vec w \neq 0$, können wir durch diese Zahl dividieren und die Behauptung ist bewiesen. Andernfalls können wir, falls wenigstens $\vec v\cdot\vec v$ nicht null ist, im obigen Argument die Rollen von $\vec v$ und $\vec w$ vertauschen und damit die Behauptung beweisen.

Wenn schließlich $\vec v\cdot\vec v$ und $\vec w\cdot\vec w$ beide null sind, folgt aus

$$(\vec v\pm\vec w)\cdot(\vec v\pm\vec w) = \pm(\vec v\cdot\vec w + \overline{\vec v\cdot\vec w}) = \pm 2\,\mathfrak{Re}(\vec v\vec w) \geq 0\,,$$

daß der Realteil von $\vec v\cdot\vec w$ verschwindet, und genauso verschwindet auch der Imaginärteil, da $(i\vec v\pm\vec w)\cdot(i\vec v\pm\vec w) = \pm 2\,\mathfrak{Im}(\vec v\cdot\vec w) \geq 0$ ist. Somit ist $\vec v\cdot\vec w = 0$, und die Ungleichung gilt auch in diesem Fall. ∎

Baron AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789–1857) stellte als erster durch die exakte Definition von Begriffen wie *Konvergenz* und *Stetigkeit* die Analysis auf ein sicheres Fundament. In insgesamt 789 Arbeiten beschäftigte er sich u.a. auch mit komplexer Analysis, Variationsrechnung, Differentialgleichungen, FOURIER-Analysis, Permutationsgruppen, der Diagonalisierung von Matrizen und der theoretischen Mechanik. Als überzeugter Royalist hatte er häufig Schwierigkeiten mit den damaligen Regierungen; er lebte daher mehrere Jahre im Exil in Turin und später in Prag, wo er (mit sehr mäßigem Erfolg) den französischen Thronfolger unterrichtete.

Der deutsche Mathematiker KARL HERMAN AMANDUS SCHWARZ (1843–1921) beschäftigte sich hauptsächlich mit konformen Abbildungen und mit sogenannten Minimalflächen, d.h. Flächen mit vorgegebenen Eigenschaften, deren Flächeninhalt minimal ist. Im Rahmen einer entsprechenden Arbeit für die WEIERSTRASS-Festschrift von 1885 (im Falle eines durch Doppelintegrale definierten Skalarprodukts) bewies er die obige Ungleichung; CAUCHY hatte sie bereits in seinem Analysislehrbuch von 1821 für endlichdimensionale Vektoren bewiesen. SCHWARZ lehrte nacheinander in Halle, Zürich, Göttingen und Berlin.

e) Orthonormalbasen

Genau wie im Falle des $\mathbb{R}^3$ wollen wir auch für beliebige EUKLIDische oder HERMITEsche Vektorräume zwei Vektoren als *orthogonal* bezeichnen, wenn ihr (HERMITEsches) Skalarprodukt verschwindet. Viele Rechnungen vereinfachen sich, wenn man von einer Basis ausgeht, deren Vektoren paarweise orthogonal sind und möglicherweise zusätzlich noch die Länge eins habe; um diese Art von Basen soll es hier gehen:

Definition: *a)* Eine Basis $\mathcal{B}$ eines EUKLIDischen oder HERMITEschen Vektorraums heißt *Orthogonalbasis,* wenn jedes Element von $\mathcal{B}$ orthogonal zu allen übrigen ist.
b) Eine Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ heißt *Orthonormalbasis,* wenn zusätzlich für jeden Vektor $\vec b \in \mathcal{B}$ gilt: $\vec b\cdot\vec b = 1$.

Standardbeispiel sind die Einheitsvektoren

$$\vec e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \vec e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec e_n = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

die sowohl für $\mathbb{R}^n$ als auch für $\mathbb{C}^n$ bezüglich des jeweiligen Standardskalar- oder HERMITEschen Produkts eine Orthonormalbasis bilden.

Tatsächlich hat sogar *jeder* EUKLIDische oder HERMITEsche Vektorraum eine Orthonormalbasis; für den Beweis werden wir uns allerdings, wie