Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

25. September 2003

Nachklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die Vektoren $\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix}$ bilden für jede reelle Zahl $\lambda \neq 0$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

2) Richtig oder falsch: Ist eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ injektiv, so ist sie auch surjektiv.

3) Welche Dimension hat der Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems aus zehn Gleichungen in zwölf Variablen mindestens, welche höchstens?

4) Richtig oder falsch: Sind alle Nivealinien der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Geraden, so ist f linear.

5) Richtig oder falsch: Die Datenpaare $(k, \frac{1}{k})$ für $k = 1, \dots, 100$ sind positiv korreliert.

6) Richtig oder falsch: Für jede lineare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist $\Delta f \equiv 0$.

7) Das Vektorfeld $\vec{V}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix}yz\\xz\\xy\end{pmatrix}$. Was ist grad div rot $\vec{V}$?

Aufgabe 1: (*11 Punkte*)
Der $\mathbb{R}$-Vektorraum V sei aufgespannt von den Polynomen

$$P_1 = x+1, \quad P_2 = x-1, \quad P_3 = x^2+1, \quad P_4 = x^2-1, \quad P_5 = x^3+1 \quad \text{und} \quad P_6 = x^3-1\,.$$

a) Finden Sie eine Basis von V!

b) Zeigen Sie: Die Vorschrift $P \mapsto xP''$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$.

c) Bestimmen Sie Basen von Kern φ und Bild φ!

d) Welche Dimension hat der Durchschnitt von Kern φ und Bild φ?

e) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der in *a)* gefundenen Basis!

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
u + v - w \quad\quad &= 1 \quad (1)\\
u + v \quad\quad - ax &= 1 \quad (2)\\
2u + 3v - 2w - 2x &= 2 \quad (3)\\
-2u - 4v + 2w + a^2x &= a \quad (4)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2-2i \\ i \\ -1-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3-3i \\ 2+2i \\ 1+i \\ 2i \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums von $\mathbb{C}^4$!

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

Zwischen zwei Größen x und t wird ein Zusammenhang der Form $x(t) = a + b\cos t + c\sin t$ erwartet. Zur Bestimmung der Parameter a, b, c werden hundert Messungen durchgeführt, die zu Wertepaaren (t_n, x_n) führen. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, dem die nach der Methode der kleinsten Quadrate bestmöglichen Schätzwerte für a, b, c genügen!

Aufgabe 5: *(8 Punkte)*

a) Ist die Matrix

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

orthogonal?

b) Was ist A^{-1}?

c) Was ist $\det(A)$?

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*

Berechnen Sie für die Funktion $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto e^{xy} + \sin(x+y) \end{cases}$ Gradient und Hesse-Matrix!

Aufgabe 7: *(4 Punkte)*

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom dritten Grades der Funktion

$$f(x,y) = \sin x \cos y + e^{xy}$$

um den Nullpunkt!

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 25. September 2003, um 13^{00} Uhr