WOLFGANG K. SEILER
*Tel.* 2515

A5, C201

*29. September 2003*

# Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

**Fragen:** *(je* **zwei** *Punkte)*
*Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine* kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

*1)* *Richtig oder falsch:* Die Menge aller nicht invertierbarer reeller $2 \times 2$-Matrizen ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

*2)* *Richtig oder falsch:* Die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei surjektiv. Dann besteht $\operatorname{Kern}\varphi$ nur aus dem Nullvektor.

*3)* In der $10 \times 10$-Matrix $A$ sei $a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}(i+j) & \text{falls } i \le j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Was ist $\det A$?

*4)* Geben Sie den Kern der linearen Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x+y \end{cases}$ explizit an!

*5)* *Richtig oder falsch:* Die Vektoren $\binom{1}{i}$ und $\binom{-i}{1}$ bilden eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^2$.

*6)* *Richtig oder falsch:* Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mindestens zweimal stetig differenzierbar, so ist $\Delta f$ gleich der Summe der Diagonaleinträge der HESSE-Matrix $H_f$.

*7)* *Richtig oder falsch:* $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen sei stetig differenzierbar, $\vec{V} = \operatorname{grad}\varphi$, und $\gamma$ sei eine ganz in $U$ liegende geschlossene Kurve. Dann ist $\int_\gamma \vec{V}\,ds = 0$.

*8)* Was ist $\iint_K dx\,dy$ für $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \le 1\right\}$?

**Aufgabe 1:** **(***9 Punkte***)**
$M$ sei die Menge aller Polynome der Form $x(x-a)(x-b)(x-c)$ mit $a,b,c \in \mathbb{R}$.

*a)* Ist $M$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

*b)* $V$ sei der von $M$ im Vektorraum aller reeller Polynome erzeugte Untervektorraum. Zeigen Sie, daß die Polynome $x, x^2, x^3$ und $x^4$ eine Basis von $V$ bilden!

*c)* Zeigen Sie: $\varphi\colon \begin{cases} V \to \mathbb{R}^4 \\ P \mapsto \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f''(0) \\ f'''(0) \end{pmatrix} \end{cases}$ ist eine lineare Abbildung.

*d)* Bestimmen Sie Basen von $\operatorname{Kern}\varphi$ und $\operatorname{Bild}\varphi$!

*e)* Welche Abbildungsmatrix hat $\varphi$ bezüglich der Basis $x, x^2, x^3, x^4$ von $V$ und der Standardbasis des $\mathbb{R}^4$?

*f)* Ist diese Abbildungsmatrix invertierbar?

**Aufgabe 2:** *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + 3y + \phantom{2}z &= 9a \qquad (1)\\ 2x + ay + 2z &= 3a \qquad (2)\\ 3x + \phantom{a}y + az &= 2 \qquad\; (3) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$!

**Aufgabe 3:** *(5 Punkte)*
Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ !

**Aufgabe 4:** *(6 Punkte)*

*a)* Berechnen Sie Gradient und HESSE-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2 \sin y - y^2 \cos x \end{cases} !$$

*b)* Berechnen Sie die JACOBI-Matrix und die Divergenz des Vektorfelds

$$\vec{V}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \sin y \\ y^2 \cos x \end{pmatrix} \end{cases} !$$

**Aufgabe 5:** *(6 Punkte)*
Berechnen Sie die TAYLOR-Polynome vom Grad drei um den Punkt $(0,0)$ von

*a)* $f(x,y) = e^x \sin y$

*b)* $g(x,y) = \cos(x-y)\sin(x+y)$ !

$\mathcal{H}\ \mathcal{I}\ \mathcal{L}\ \mathcal{F}\ \mathcal{S}\ \mathcal{M}\ \mathcal{I}\ \mathcal{T}\ \mathcal{T}\ \mathcal{E}\ \mathcal{L}$

Als Hilfsmitel sind nur Taschenrechner ohne Graphik
und ohne höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.
Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe,
notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.

Die Lösungen werden im Laufe des Tages im Netz erscheinen.

**Abgabe** bis zum Montag, dem 29. September 2003, um $10^{15}$ Uhr

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •