Wolfgang K. Seiler — A5, C201
Tel. 2515

19. Juli 2003

Scheinklausur Höhere Mathematik I

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

Lösung: Genau dann wenn keine der drei Zahlen verschwindet, denn genau dann sind die drei Vektoren linear unabhängig, da $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc \neq 0$.
(Alternativ: Da aus $\lambda \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda a + \mu b \\ \lambda a + \mu b + \nu c \end{pmatrix} = \vec{0}$ dann sofort $\nu = \mu = \lambda = 0$ folgt, oder aber auch weil sich die Einheitsvektoren dann leicht aus den drei gegebenen linear kombinieren lassen.)

2) Richtig oder falsch: $\varphi\colon V \to W$ sei eine lineare Abbildung zwischen den $\mathbb{R}$-Vektorräumen V und W. Dann ist das Urbild $\varphi^{-1}(U) = \left\{\vec{v} \in V \mid \varphi(\vec{v}) \in U\right\}$ eines jeden Untervektorraums U von W ein Untervektorraum von V.

Lösung: *Richtig,* denn $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$ liegt in jedem Untervektorraum, und für $\vec{v}, \vec{w} \in \varphi^{-1}(U)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\varphi(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda\varphi(\vec{v}) + \mu\varphi(\vec{w}) \in U$, da $\varphi(\vec{v}), \varphi(\vec{w}) \in U$.

3) $\varphi\colon \mathbb{R}^{2003} \to \mathbb{R}^{2000}$ sei eine lineare Abbildung. Welche Dimension hat $\operatorname{Kern}\varphi$ mindestens, welche höchstens?

Lösung: Nach der Dimensionsformel ist $\dim \operatorname{Kern}\varphi = 2003 - \dim \operatorname{Bild}\varphi$. Da $\operatorname{Bild}\varphi$ in $\mathbb{R}^{2000}$ liegt, ist $0 \leq \dim \operatorname{Bild}\varphi \leq 2000$, also $3 \leq \dim \operatorname{Kern}\varphi \leq 2003$.

4) Richtig oder falsch: Wenn ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{F}_2$ eine ungerade Anzahl von Lösungen hat, ist es eindeutig lösbar.

Lösung: *Richtig,* denn ein lösbares LGS hat genauso viele Lösung wie sein homogenes Gleichungssystem, und dessen Lösungsmenge ist ein $\mathbb{F}^2$-Vektorraum, hat also 2^n Elemente für $n =$ Dimension.

5) Welche Niveaulinien $N_a(f)$ hat die Funktion $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ in $\mathbb{R}^2$?

Lösung: Für $a < 1$ ist $N_a(f) = \emptyset$, für $a = 1$ besteht $N_a(f)$ nur aus dem Nullpunkt, und für $a > 1$ ist es der Kreis mit Radius $\sqrt{\ln a}$ um den Nullpunkt.

6) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten der 1000 Datenpaare $(\cos^2 n, \sin^2 n)$, wobei n die Zahlen von 1 bis 1000 durchläuft.

Lösung: Da $\cos^2 n = 1 - \sin^2 n$ ist, liegen alle 1000 Datenpunkte auf einer Geraden mit negativer Steigung; der Korrelationskoeffizient ist also $\kappa = -1$.

7) Richtig oder falsch: Falls für $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ die partielle Ableitung f_{yy} überall verschwindet, gibt es eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, so daß gilt

$$f(x, y) = ay + g(x) .$$

Lösung: *Falsch;* auch für $f(x, y) = xy$ verschwindet f_{yy} überall.
(Tatsächlich muß $f(x, y) = h(x)y + g(x)$ sein mit $g, h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.)

Aufgabe 1: *(11 Punkte)*
$V \le \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sei der kleinste Untervektorraum, der die Teilmenge

$$M = \big\{ f(x) = (ax + b)(c \cos x + d \sin x) \bigm| a, b, c, d \in \mathbb{R} \big\}$$

enthält, und W sei der Vektorraum aller reeller Polynome vom Grad höchstens zwei.

a) Finden Sie Basen von V und W!

Lösung: Für W ist das völlig problemlos: Wir nennen die Variable, in der die Polynome ausgedrückt werden, x und nehmen wie üblich die x-Potenzen als Basis, hier also die drei Polynome $1, x, x^2$.
Im Falle von V zeigt Ausmultiplizieren, daß

$$(ax + b)(c \cos x + d \sin x) = ac \cdot x \cos x + ad \cdot x \sin x + bc \cdot \cos x + bd \cdot \sin x$$

stets als Linearkombination der vier Funktionen

$$x \cos x, \quad x \sin x, \quad \cos x \quad \text{und} \quad \sin x$$

geschrieben werden kann. Diese vier Funktionen liegen auch in M; man erhält sie, indem man in jedem der beiden Faktoren von $(ax+b)(c \cos x + d \sin x)$ jeweils einen Koeffizienten auf null und den anderen auf eins setzt. Damit erzeugen sie den kleinsten Untervektorraum, der M enthält.
Zum Nachweis ihrer linearen Unabhängigkeit betrachten wir eine Darstellung

$$\alpha x \cos x + \beta x \sin x + \gamma \cos x + \delta \sin x = 0 .$$

Einsetzen von $x = 0$ zeigt, daß $\gamma = 0$ sein muß; beachtet man dies und setzt $x = \pi$, folgt, daß auch α verschwindet. Wären nun die beiden verbleibenden Koeffizienten β und δ nicht beide null, müßte eine der beiden Funktion $\sin x, x \sin x$ ein konstantes Vielfaches der anderen sein, was offensichtlich nicht der Fall ist: Der Betrag des Sinus ist überall kleiner oder gleich eins, der von $x \sin x$ wächst unbeschränkt für $x \to \infty$.
Damit bilden die vier angegebenen Funktionen eine Basis von V.

b) Zeigen Sie: Die Vorschrift

$$\varphi(f) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2$$

definiert eine lineare Abbildung $\varphi \colon V \to W$.

Lösung: Wegen der Linearität der Differentiation und des Einsetzens ist für $f, g \in V$ (tatsächlich sogar für beliebiges $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda f + \mu g) &= (\lambda f + \mu g)(0) + (\lambda f + \mu g)'(0)x + \frac{1}{2}(\lambda f + \mu g)''(0)x^2 \\
&= \lambda f(0) + \mu g(0) + \lambda f'(0)x + \mu g'(0)x + \frac{1}{2}\big(\lambda f''(0)x^2 + \mu g''(0)x^2\big) \\
&= \lambda\big(f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2\big) + \mu\big(g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(0)x^2\big) \\
&= \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)\,.
\end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie Basen von Kern φ und Bild φ!

Lösung: Dazu müssen wir zunächst die Bilder der Basisvektoren explizit ausrechnen. Dies geschieht entweder durch Differenzieren oder aber indem wir beachten, daß $\varphi(f)$ einfach das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von f um Null ist, das sich über die bekannten TAYLOR-Reihen von Sinus und Cosinus hier leicht bestimmen läßt. Beides führt auf

$$\varphi\big(x\cos x\big) = x, \quad \varphi\big(x\sin x\big) = x^2, \quad \varphi\big(\cos x\big) = 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{und} \quad \varphi\big(\sin x\big) = x\,.$$

Also haben $x\cos x$ und $\sin x$ dasselbe Bild, d.h. $x\cos x - \sin x$ liegt im Kern von φ.
Da die drei Bilder x, x^2 und $1 - \frac{1}{2}x^2$ linear unabhängig sind, ist die Abbildung surjektiv; Basis des Bilds ist also z.B. $1, x, x^2$ (oder natürlich die drei gerade betrachteten Bildvektoren.)
Nach der Dimensionsformel ist dann $\dim \text{Kern}\,\varphi = \dim V - \dim \text{Bild}\,\varphi = 4 - 3 = 1$, d.h. Basis des Kerns ist z.B. das bereits gefundene Element $x\cos x - \sin x$.

d) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der in *a)* gefundenen Basen!

Lösung: Die Basisvektoren seien jeweils so angeordnet wie oben in *a)*. In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Bilder der Basisvektoren, genauer: ihre Koeffizienten bezüglich der jeweils gewählten Basis. Die Bilder haben wir bereits in *c)* berechnet; wir müssen sie nun nur in der in *a)* gewählten Basis $1, x, x^2$ darstellen. Dies ergibt die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

e) Ist die Menge M bereits selbst ein Vektorraum?

Lösung: Wie die Rechnung in *a)* zeigte, läßt sich jedes Element von M schreiben als

$$f = ac \cdot x\cos x + ad \cdot x\sin x + bc \cdot \cos x + bd \cdot \sin x\,.$$

Falls M ein Vektorraum wäre, müßte sich auch jedes Element der Form

$$\alpha x\cos x + \beta x\sin x + \gamma\cos x + \delta\sin x$$

in dieser Form schreiben lassen, d.h. es gälte z.B. $\alpha : \beta = \gamma : \delta$. Dies ist beim Element

$$x\cos x + \cos x + \sin x$$

sicherlich nicht der Fall, also liegt es nicht in M und M ist somit *kein* Vektorraum.

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} w \qquad + \qquad\quad ay + \ az &=& 8 \qquad (1)\\ w + 2x + \qquad 3ay - 3az &=& 4a \qquad (2)\\ w + 4x + (3a-2)y + 4az &=& 19 \qquad (3)\\ 2w - 2x + \ (1+a)y \qquad\quad &=& 10 \qquad (4) \end{array}$$

Lösung: Zur Elimination von w aus den letzen drei Gleichungen subtrahieren wir die erste Gleichung einmal von der zweiten und dritten und zweimal von der vierten:

$$\begin{array}{rcl} 2x + \qquad 2ay - 4az &=& 4a-8 \qquad (5)\\ 4x + (2a-2)y + 3az &=& 11 \qquad (6)\\ -2x + \ (1-a)y - 2az &=& -6 \qquad (7) \end{array}$$

Als nächstes soll y aus den Gleichungen (6) und (7) eliminiert werden; dazu subtrahieren wir zweimal Gleichung (5) von (6) und addieren sie zu Gleichung (7):

$$\begin{array}{rcl} (-2-2a)y + 11az &=& 27-8a \qquad (8)\\ (1+a)y - \ 6az &=& 4a-14 \qquad (9) \end{array}$$

Zweimal Gleichung (8) plus Gleichung (9) ergibt

$$-az = -1\,,$$

woraus sofort folgt, daß das Gleichungssystem für $a = 0$ unlösbar ist. Für $a \neq 0$ können wir dividieren und erhalten

$$z = \frac{1}{a} \quad \text{für } a \neq 0\,.$$

Dies können wir beispielsweise in Gleichung (9) einsetzen:

$$(1+a)y - 6 = 4a - 14 \quad \text{oder} \quad (1+a)y = 4a - 8\,.$$

Für $a = -1$ ist diese Gleichung und damit das LGS unlösbar; für $a \neq -1$ können wir durch $(1+a)$ dividieren und erhalten

$$y = \frac{4(a-2)}{a+1}\,.$$

Gleichung (7), aufgelöst nach x ergibt

$$x = 3 + \frac{1-a}{2}y - az = 3 - 2\frac{(a-1)(a-2)}{a+1} - 1 = \frac{-2(a^2-4a+1)}{a+1}\,.$$

Entsprechend folgt aus Gleichung (1), daß

$$w = 8 - ay - az = 8 - \frac{4a(a-2)}{a+1} - 1 = -\frac{4a^2-15a-7}{a+1}\,.$$

Insgesamt ist also

$$\mathcal{L}_a = \left\{\left(-\frac{4a^2-15a-7}{a+1}, \frac{-2(a^2-4a+1)}{a+1}, \frac{4(a-2)}{a+1}, \frac{1}{a}\right)\right\}$$

für $a \neq 0, -1$ und $\mathcal{L}_a = \emptyset$ für $a = 0$ sowie $a = -1$.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+i \\ 2+2i \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3-i \\ 3i-1 \\ i-3 \\ 1+i \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums von $\mathbb{C}^4$!

Lösung: Wir bestimmen zunächst nach GRAM-SCHMIDT eine Orthogonalbasis: Erster Basisvektor ist $\vec{b}_1 = \vec{v}_1$, den zweiten setzen wir an als $\vec{b}_2 = \vec{v}_2 + \lambda\vec{v}_1$, wobei λ so gewählt werden muß, daß

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 0$$

ist. Hier ist

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = |1-i|^2 + |2+i|^2 + |2+2i|^2 + 1 = 2+5+8+1 = 16$$

und

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 &= (3-i)\cdot(1+i) + (-1+3i)\cdot(2-i) + (i-3)\cdot(2-2i) - (1+i) \\ &= (4+2i) + (1+7i) + (-4+8i) - (1+i) = 16i\,, \end{aligned}$$

also ist $\lambda = -i$ und $\vec{b}_2 = \vec{v}_2 - i\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2-2i \\ i \\ -1-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$.

$\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ müssen noch auf Länge eins normiert werden: Wir wissen bereits, daß $\vec{b}_1 = \vec{v}_1$ die Länge $\sqrt{16} = 4$ hat, und da

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 = |2-2i|^2 + 1 + |-1-i|^2 + |1+2i|^2 = 8+1+2+5 = 16$$

ist, gilt dasselbe für $\vec{b}_2$. Als Elemente einer Orthonormalbasis können wir also die Vektoren

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-i \\ 2+i \\ 2+2i \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-2i \\ i \\ -1-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$$

nehmen.

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*
Zwischen zwei Größen x und t wird ein Zusammenhang der Form $x(t) = (a + bt + ct^2)e^{-t}$ erwartet. Zur Bestimmung der Parameter a, b, c werden hundert Messungen durchgeführt, die zu Wertepaaren (t_n, x_n) führen. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, dem die nach der Methode der kleinsten Quadrate bestmöglichen Schätzwerte für a, b, c genügen!

Lösung: Falls der Zusammenhang perfekt wäre, würden die gesuchten Paramter a, b, c den hundert linearen Gleichungen

$$e^{-t_i}a + t_i e^{-t_i}b + t_i^2 e^{-t_i}c = x_i$$

genügen; in Matrixform ist das das LGS

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{x} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} e^{-t_1} & t_1e^{-t_1} & t_1^2e^{-t_1} & t_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ e^{-t_{100}} & t_{100}e^{-t_{100}} & t_{100}^2e^{-t_{100}} & \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{100} \end{pmatrix}.$$

Dieses LGS für a, b, c wird praktisch immer unlösbar sein; die im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate beste Schätzung erhält man, indem man mit der adjungierten, d.h.

hier im Reellen einfach der transponierten Matrix von A multipliziert: $({}^tAA)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = {}^tA\vec{x}$.

Ausgeschrieben wird das

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{100} e^{-2t_i} & \sum_{i=1}^{100} t_i e^{-2t_i} & \sum_{i=1}^{100} t_i^2 e^{-2t_i} \\ \sum_{i=1}^{100} t_i e^{-2t_i} & \sum_{i=1}^{100} t_i^2 e^{-2t_i} & \sum_{i=1}^{100} t_i^3 e^{-2t_i} \\ \sum_{i=1}^{100} t_i^2 e^{-2t_i} & \sum_{i=1}^{100} t_i^3 e^{-2t_i} & \sum_{i=1}^{100} t_i^4 e^{-2t_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{100} e^{-t_i} x_i \\ \sum_{i=1}^{100} t_i e^{-t_i} x_i \\ \sum_{i=1}^{100} t_i^2 e^{-t_i} x_i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5: (*8 Punkte*)

a) Ist die Matrix $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ orthogonal?

Lösung: Man kann entweder direkt nachrechnen, ob ${}^tA \cdot A$ die Einheitsmatrix ist, oder aber sich davon überzeugen, daß jeder Spaltenvektor

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

orthogonal zu jedem anderen ist und Länge eins hat. Länge eins sieht man in allen vier Fällen sofort, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_i$ verschwindet für $i \neq 1$, weil jeder der anderen Vektoren genauso viele Einträge $+1$ wie -1 hat, $\vec{v}_4 \cdot \vec{v}_i$ verschwindet für $i \neq 4$, da jeder der anderen Vektoren unter den ersten beiden Einträgen genauso viele Plus- und Minuszeichen hat wie bei den letzen beiden, und schließlich rechnet man auch sofort nach, daß $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0$ ist. Also ist die Matrix orthogonal.

b) Was ist A^{-1}?

Lösung: Für eine orthogonale Matrix ist $A^{-1} = {}^tA$, hier also $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Was ist $\det(A)$?

Lösung: Da A orthogonal ist, muß $\det A = \pm 1$ sein; das richtige Vorzeichen bekommen wir aber leider nicht ohne Rechnung. Der Vorfaktor $\frac{1}{2}$ muß in *jeder* der vier Spalten berücksichtigt werden, führt also bei der Determinante zu einem Faktor $\frac{1}{16}$. Alsdann empfiehlt es sich, etwa durch Subtraktion der ersten Zeile von den folgenden für Nullen zu sorgen:

$$\det A = \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

In der rechtsstehenden Matrix läßt sich in jeder Spalte eine Zwei ausklammern und in den Vorfaktor ziehen; die verbleibende Determinante kann dann leicht entweder nach der SARRUSschen Regel berechnet werden oder, weniger fehleranfällig, durch Subtraktion der dritten Zeile von der ersten:

$$\det A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1.$$

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*
$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar und in einem festen Punkt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ sei $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) \neq \vec{0}$. Weiter sei $\vec{h} \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Einheitsvektor und $\vec{g}$ der Einheitsvektor in Richtung des Gradienten $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x})$. Zeigen Sie, daß für hinreichend kleine reelle Zahlen $\varepsilon > 0$ gilt:

$$f(\boldsymbol{x} + \varepsilon\vec{h}) \leq f(\boldsymbol{x} + \varepsilon\vec{g})$$

Lösung: Nach Definition der Differenzierbarkeit ist

$$f(\boldsymbol{x} + \varepsilon\vec{h}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot (\varepsilon\vec{h}) + o\left(\left|i\varepsilon\vec{h}\right|\right) = f(\boldsymbol{x}) + \varepsilon\nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{h} + o(\varepsilon)$$

und

$$f(\boldsymbol{x} + \varepsilon\vec{g}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot (\varepsilon\vec{g}) + o(|i\varepsilon\vec{g}|) = f(\boldsymbol{x}) + \varepsilon\nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{g} + o(\varepsilon)\,,$$

denn $\left|\vec{h}\right| = |\vec{g}| = 1$. Für hinreichend kleine ε können die beiden $o(\varepsilon)$-Terme gegenüber dem Rest vernachlässigt werden; die Behauptung wird dann äquivalent zu $\nabla f(\boldsymbol{x})\cdot\vec{h} \leq \nabla f(\boldsymbol{x})\cdot\vec{g}$. Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist gleich dem Produkt der Längen mal dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels. Da $\vec{h}$ und $\vec{g}$ beide die Länge eins haben, ist das Produkt der Längen in beiden Fällen gleich der Länge von $\nabla f(\boldsymbol{x})$, und der Cosinus des eingeschlossenen Winkels nimmt beim Produkt mit $\vec{g}$ seinen maximalen Wert eins an, da $\vec{g}$ dieselbe Richtung hat wie $\nabla f(\boldsymbol{x})$. Damit ist die Ungleichung bewiesen.
(Alternativ kann man statt über den Cosinus auch über die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung argumentieren.)

Aufgabe 7: *(4 Punkte)*
Berechnen Sie für die Funktion $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sin(xy) + \cosh(x+y) \end{cases}$ Gradient und HESSE-Matrix!

Lösung: Die Funktion ist offensichtlich mindestens zweimal stetig differennzierbar (sie ist sogar analytisch); es reicht also, die partiellen Ableitungen zu berechnen. Für den Gradienten bekommen wir

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y\cos(xy) + \sinh(x+y) \\ f_y(x,y) &= x\cos(xy) + \sinh(x+y) \\ \nabla f(x,y) &= \begin{pmatrix} y\cos(xy) + \sinh(x+y) \\ x\cos(xy) + \sinh(x+y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für die HESSE-Matrix können wir aus dem SCHWARZschen Lemma folgern, daß $f_{xy} = f_{yx}$ ist, wir müssen also nur eine der beiden gemischten Ableitungen berechnen.

$$f_{xx}(x,y) = -y^2\sin(xy) + \cosh(x+y)$$
$$\begin{aligned} f_{xy}(x,y) &= -xy\sin(xy) + \cos(xy) + \cosh(x+y) \\ f_{yy}(x,y) &= -x^2\sin(xy) + \cosh(x+y) \end{aligned}$$

Damit ist

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -y^2\sin(xy) + \cosh(x+y) & -xy\sin(xy) + \cos(xy) + \cosh(x+y) \\ -xy\sin(xy) + \cos(xy) + \cosh(x+y) & -x^2\sin(xy) + \cosh(x+y) \end{pmatrix}.$$