Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

19. Juli 2003

Scheinklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

2) Richtig oder falsch: $\varphi\colon V \to W$ sei eine lineare Abbildung zwischen den $\mathbb{R}$-Vektorräumen V und W. Dann ist das Urbild $\varphi^{-1}(U) = \left\{\vec{v} \in V \mid \varphi(\vec{v}) \in U\right\}$ eines jeden Untervektorraums U von W ein Untervektorraum von V.

3) $\varphi\colon \mathbb{R}^{2003} \to \mathbb{R}^{2000}$ sei eine lineare Abbildung. Welche Dimension hat $\operatorname{Kern}\varphi$ mindestens, welche höchstens?

4) Richtig oder falsch: Wenn ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{F}_2$ eine ungerade Anzahl von Lösungen hat, ist es eindeutig lösbar.

5) Welche Niveaulinien $N_a(f)$ hat die Funktion $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ in $\mathbb{R}^2$?

6) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten der 1000 Datenpaare $(\cos^2 n, \sin^2 n)$, wobei n die Zahlen von 1 bis 1000 durchläuft.

7) Richtig oder falsch: Falls für $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ die partielle Ableitung f_{yy} überall verschwindet, gibt es eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, so daß gilt

$$f(x, y) = ay + g(x)\,.$$

Aufgabe 1: (*11 Punkte)*
$V \le \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sei der kleinste Untervektorraum, der die Teilmenge

$$M = \left\{f(x) = (ax + b)(c\cos x + d\sin x) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$$

enthält, und W sei der Vektorraum aller reeller Polynome vom Grad höchstens zwei.

a) Finden Sie Basen von V und W!

b) Zeigen Sie: Die Vorschrift

$$\varphi(f) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$.

c) Bestimmen Sie Basen von $\operatorname{Kern}\varphi$ und $\operatorname{Bild}\varphi$!

d) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der in *a)* gefundenen Basen!

e) Ist die Menge M bereits selbst ein Vektorraum?

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rl} w + ay + az = 8 & (1) \\ w + 2x + 3ay - 3az = 4a & (2) \\ w + 4x + (3a-2)y + 4az = 19 & (3) \\ 2w - 2x + (1+a)y = 10 & (4) \end{array}$$

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+i \\ 2+2i \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3-i \\ 3i-1 \\ i-3 \\ 1+i \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums von $\mathbb{C}^4$!

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*
Zwischen zwei Größen x und t wird ein Zusammenhang der Form $x(t) = (a + bt + ct^2)e^{-t}$ erwartet. Zur Bestimmung der Parameter a, b, c werden hundert Messungen durchgeführt, die zu Wertepaaren (t_n, x_n) führen. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, dem die nach der Methode der kleinsten Quadrate bestmöglichen Schätzwerte für a, b, c genügen!

Aufgabe 5: *(8 Punkte)*

a) Ist die Matrix $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ orthogonal?
b) Was ist A^{-1}?
c) Was ist $\det(A)$?

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*
$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar und in einem festen Punkt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ sei $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) \neq \vec{0}$. Weiter sei $\vec{h} \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Einheitsvektor und $\vec{g}$ der Einheitsvektor in Richtung des Gradienten $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x})$. Zeigen Sie, daß für hinreichend kleine reelle Zahlen $\varepsilon > 0$ gilt:

$$f(\boldsymbol{x} + \varepsilon\vec{h}) \leq f(\boldsymbol{x} + \varepsilon\vec{g})$$

Aufgabe 7: *(4 Punkte)*
Berechnen Sie für die Funktion $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sin(xy) + \cosh(x+y) \end{cases}$ Gradient und Hesse-Matrix!

Formelsammlung

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Samstag, dem 19. Juli 2003, um 13^{00} Uhr