WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 15./16. Juli 2003

Natürlich sind gerade diese Woche mehr noch als sonst auch alle früheren Themenvorschläge und Übungsblätter relevant, eventuell auch die Schein- und Vordiplomsklausuren vergangener Jahre.

Wie letzte Woche seien

$$\begin{aligned}
f_1 &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \quad (x,y,z) \mapsto x^3+y^3+z^3+3xyz\\
f_2 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x,y) \mapsto \sin x \cos y\\
f_3 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x,y) \mapsto e^{x^2+y^2}\\
f_4 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x,y) \mapsto \arctan x + y
\end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die vollständige TAYLOR-Reihe von f_1 um den Punkt $(0,0,0)$!

b) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von f_1 um den Punkt $(1,0,0)$!

c) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von f_2 bis f_4 um den Nullpunkt!

d) *Richtig oder falsch:* Für die Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ verschwinde die JACOBI-Matrix überall. Dann gibt es einen Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, so daß $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

e) *Richtig oder falsch:* Wenn die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ überall und zu jeder beliebigen Ordnung stetige partielle Ableitungen hat, ist sie um jeden Punkt durch eine TAYLOR-Reihe darstellbar.

f) *Richtig oder falsch:* Sei $D \subset \mathbb{R}^2$. Falls für $f \in \mathcal{C}^1(D,\mathbb{R})$ überall $\operatorname{grad} f \neq \vec{0}$ ist, kann $f(x,y)=0$ überall eindeutig nach y aufgelöst werden.

g) *Richtig oder falsch:* Die Gleichung $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ ist genau dann in einer Umgebung von $(a_0,\dots a_n,x) \in \mathbb{R}^{n+2}$ eindeutig nach x auflösbar, wenn x eine einfache Nullstelle des Polynoms $a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ ist.

h) Bestimmen Sie für $F(x,y) = xy - x\sin y \cdot \cos y - 3x - 5$ alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, für die $F(x,y)=0$ nicht eindeutig nach y aufgelöst werden kann!

i) Berechnen Sie für alle Punkte (x_0,y_0), in deren Umgebung $f(x,y)=0$ eindeutig nach y aufgelöst werden kann, die Ableitung der Funktion $f(x)$, für die dort $F\big(x,f(x)\big)=0$ ist.

j) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix des Vektorfelds $(x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ yz+xz+xy \\ xyz \end{pmatrix}$ auf $\mathbb{R}^3$!

k) Bestimmen Sie Divergenz und Rotation von $\vec{V}$!

l) *ditto* für $\vec{W}\colon \mathbb{R}^3 \setminus \big\{(0,0,0)\big\} \to \mathbb{R}^3;\quad \vec{v} \mapsto \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$!

m) Was sind die Divergenz und die Rotation der linearen Funktion

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} a_0+a_1x+a_2y+a_3z \\ b_0+b_1x+b_2y+b_3z \\ c_0+c_1x+c_2y+c_3z \end{pmatrix} ?$$

n) Berechnen Sie $\operatorname{div}\operatorname{grad} e^{-(x^2+y^2+z^2)}$!

o) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfelds $V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} -y^2-z^2 \\ -x^2-z^2 \\ -x^2-y^2 \end{pmatrix}$!

p) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfelds $\vec{W}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} yz^2 \\ x^2z \\ xy^2 \end{pmatrix}$!