

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 8./9. Juli 2003

a) Welche der folgenden Vorschriften definieren Normen auf \mathbb{C} ?

$$\begin{aligned}\|z\|_1 &= |z|, & \|z\|_2 &= \Re z + \Im z, & \|z\|_3 &= \max(\Re z, \Im z), \\ \|z\|_4 &= \max(|\Re z|, |\Im z|), & \|z\|_5 &= (\Re z)(\Im z), & \|z\|_6 &= (\Re z)^2 + (\Im z)^2\end{aligned}$$

Lösung: Unter der Identifikation von \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 entspricht $\|z\|_1$ der EUKLIDISCHEN Norm und $\|z\|_4$ der Maximumsnorm; zumindest die beiden sind also Normen, der Rest allerdings nicht: Wegen $\|1 - i\|_2 = \|-1\|_3 = \|1\|_5 = 0$ erfüllen diese Normen nicht die dritte definierende Bedingung, und wegen $\|\lambda z\|_6 = \lambda^2 \|z\|_6$ ist hier die erste Bedingung verletzt.

b) Zeigen Sie mit irgendeiner der Vorschriften, die Normen definieren, daß die Abbildung $z \mapsto z^2$ bezüglich dieser Norm in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ stetig ist!

Lösung: Am einfachsten ist meist die Maximumsnorm; sei also für zwei komplexe Zahlen $z = x + iy$ und $w = u + iv$ die Bedingung $\|z - w\|_4 < \delta$ erfüllt, d.h.

$$|\Re z - \Re w| = |x - u| < \delta \quad \text{und} \quad |\Im z - \Im w| = |y - v| < \delta.$$

Da $z^2 - w^2 = (x^2 - y^2 + 2ixy) - (u^2 - v^2 + 2iuv) = (x^2 - u^2) + (v^2 - w^2) + 2i(xy - uv) = (x + y)(x - y) + (v + w)(v - w) + 2i((x(y - v) + (x - u)v))$.

Damit ist

$$\begin{aligned}|\Re(z^2 - w^2)| &= |(x + y)(x - y) + (v + w)(v - w)| \leq |(x + y)(x - y)| + |(v + w)(v - w)| \\ &\leq |x + y| \delta + |v + w| \delta.\end{aligned}$$

Da $|x - y| \leq \delta$, ist $|x + y| \leq |x| + |y| \leq 2|x| + \delta$; genauso folgt, daß $|u + v| \leq 2|u| + \delta$ ist. Also ist

$$|\Re(z^2 - w^2)| \leq \delta((2|x| + \delta) + (2|u| + \delta)).$$

Weiter ist

$$|\Im(z^2 - w^2)| = 2|(x(y - v) + (x - u)v)| \leq 2|x + v| \delta \leq (|x| + |y| + \delta)\delta.$$

Mit $M = 1 + 2\|z\|_4 = 1 + 2\max(|x|, |y|)$ ist also für $\delta \leq 1$

$$|\Re(z^2 - w^2)| \leq M\delta \quad \text{und} \quad |\Im(z^2 - w^2)| \leq M\delta.$$

Ist also $\varepsilon > 0$ gegeben, so gilt für

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \min\left(\frac{\varepsilon}{M}, 1\right)$$

die Folgerung

$$\|z - w\|_4 < \delta \implies \|z^2 - w^2\|_4 < \varepsilon,$$

d.h. die Funktion ist stetig in z . (Man beachte, daß M nur von z abhängt, nicht von w !)

- c) M sei der Vektorraum aller reeller $n \times m$ -Matrizen. Welche der folgenden Vorschriften definieren Normen auf M ?

$$\|A\|_1 = \max_{(i,j)} |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|, \quad \|A\|_3 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2,$$

$$\|A\|_4 = \max_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^m a_{ij}^2}, \quad \|A\|_5 = \sum_{j=1}^m \sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ij}^2}$$

Lösung: Die Bedingung $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ erfüllen offenbar alle Kandidaten außer $\|A\|_3$; also ist das keine Norm und wir können uns im folgenden auf die übrigen Kandidaten beschränken.

Mit der Dreiecksungleichung gibt es nirgends Probleme, denn sie gilt für Beträge wie auch für EUKLIDISCHE Normen, und wenn man mehrere Funktionen dieser Art summiert, addieren sich einfach sowohl die linken als auch die rechten Seiten, so daß die Dreiecksungleichung auch für die Summe gilt. Die dritte Bedingung schließlich ist auch in allen Fällen trivial. Also sind mit Ausnahme des dritten Falls alle Normen.

- d) Welche der folgenden Punktfolgen (x_n, y_n) aus \mathbb{R}^2 ist konvergent für $n \rightarrow \infty$, und wohin konvergiert sie?

1) $(x_n, y_n) = (\frac{1}{1+n^2}, \frac{1}{n^3})$, 2) $(x_n, y_n) = ((-1)^n, \frac{1}{n})$, 3) $(x_n, y_n) = (e^{-n}, \cos(e^{-n^2}))$

Lösung: Wenn wir mit der Maximumnorm arbeiten, geht es einfach darum, die Konvergenz der beiden Komponenten nachzuweisen. Bei 1) und 3) ist das trivial (modulo *Analysis I*); die Folgen konvergieren gegen $(0,0)$ bzw. $(0,1)$. Die zweite Folge dagegen konvergiert zwar in ihrer zweiten Komponente gegen null, die erste dagegen oszilliert ständig zwischen ± 1 . Damit ist diese Folge nicht konvergent.

- e) Was können Sie über eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sagen, deren Niveaulinien konzentrische Kreise um den Nullpunkt sowie die nur aus dem Nullpunkt bestehende Menge sind?

Lösung: Da $f(x,y)$ nur von $x^2 + y^2$ abhängt, gibt es eine Funktion $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $f(x,y) = \varphi(x^2 + y^2)$ ist; da die Niveaulinien einzelne Kreise sowie der Nullpunkt sind, ist φ injektiv.

- f) Beschreiben Sie den Graphen der Funktion $f(x,y) = 5 - \sqrt{x^2 + y^2}$ geometrisch!

Lösung: Es ist ein Kegel um die z-Achse mit Spitze im Punkt $(0,0,5)$. Der Radius r wird auf der Höhe $5 - r$ erreicht, der Öffnungswinkel ist also 45° .

- g) Wo ist die Funktion f aus der letzten Aufgabe stetig? Wo ist sie differenzierbar?

Lösung: Da die reelle Wurzelfunktion überall stetig ist und $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ offensichtlich auch, ist f überall stetig. Mit der Differenzierbarkeit gibt es allerdings Probleme im Nullpunkt, denn dort ist $t \mapsto \sqrt{t}$ nicht differenzierbar.

- h) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen nach x, y und z , und bestimmen Sie den Gradienten überall dort, wo er existiert!

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + y^2z + z^2x + xyz$$

$$g(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2} \cdot \cos(xy)$$

$$h(x,y,z) = \frac{x+y}{x-z}$$

$$k(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$l(x,y,z) = ax + by + cz + d$$

Lösung:

$$f_x(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + z^2 + yz$$

$$f_y(x, y, z) = 3y^2 + x^2 + 2yz + xz$$

$$f_z(x, y, z) = 3z^2 + y^2 + 2xz + xy$$

$$g_x(x, y, z) = 2xe^{x^2+y^2+z^2} \cos(xy) - e^{x^2+y^2+z^2} \sin(xy)y$$

$$g_y(x, y, z) = 2ye^{x^2+y^2+z^2} \cos(xy) - e^{x^2+y^2+z^2} \sin(xy)x,$$

$$g_z(x, y, z) = 2ze^{x^2+y^2+z^2} \cos(xy)$$

$$h_x(x, y, z) = \frac{1}{x-z} - \frac{x+y}{(x-z)^2}$$

$$h_y(x, y, z) = \frac{1}{x-z}$$

$$h_z(x, y, z) = \frac{x+y}{(x-z)^2}$$

$$k_x(x, y, z) = \frac{1}{x\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$k_y(x, y, z) = \frac{1}{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$k_z(x, y, z) = \frac{1}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\ell_x(x, y, z) = 2x, \quad \ell_y(x, y, z) = b, \quad \ell_z(x, y, z) = c$$

- i) *Richtig oder falsch:* Für die Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ verschwinde die JACOBI-Matrix überall. Dann gibt es einen Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, so daß $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Lösung: *Richtig*, denn nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung einer Veränderlichen hängt eine Funktion einer Variablen nicht von dieser Variablen ab, wenn die Ableitung verschwindet. Falls alle partielle Ableitungen verschwinden, hängt jede Komponente $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion also von keiner der Variablen ab, ist also konstant.

- j) Berechnen Sie, falls die Vorlesung soweit kommt, die HESSE-Matrizen der folgenden Funktionen:

$$f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y, z) \mapsto x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$$

$$f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto \sin x \cos y$$

$$f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto e^{x^2+y^2}$$

$$f_4: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto \arctan x + y$$

Lösung:

$$\nabla f_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3yz \\ 3y^2 + 3xz \\ 3z^2 + 3xy \end{pmatrix}, \quad H_{f_1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x, 3z, 3y \\ 3z, 6y, 3x \\ 3y, 3x, 6z \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_2(x, y) = \begin{pmatrix} \cos x \cos y \\ -\sin x \sin y \end{pmatrix}, \quad H_{f_2}(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y & \\ & -\cos x \sin y \\ -\cos x \sin y & -\sin x \cos y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_3(x, y) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2+y^2} \\ 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \quad H_{f_3}(x, y) = \begin{pmatrix} 2e^{x^2+y^2} + 4x^2e^{x^2+y^2} & 4xye^{x^2+y^2} \\ 4xye^{x^2+y^2} & 2e^{x^2+y^2} + 4y^2e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_4(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x^2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H_{f_4}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\frac{2x}{(1+x^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$