WOLFGANG K. SEILER A5, ZIMMER C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 8./9. Juli 2003

a) Welche der folgenden Vorschriften definieren Normen auf $\mathbb{C}$?

$$\|z\|_1 = |z|\,,\qquad \|z\|_2 = \mathfrak{Re}\,z + \mathfrak{Im}\,z,\qquad \|z\|_3 = \max(\mathfrak{Re}\,z, \mathfrak{Im}\,z),$$
$$\|z\|_4 = \max(|\mathfrak{Re}\,z|\,, |\mathfrak{Im}\,z|),\qquad \|z\|_5 = (\mathfrak{Re}\,z)(\mathfrak{Im}\,z),\qquad \|z\|_6 = (\mathfrak{Re}\,z)^2 + (\mathfrak{Im}\,z)^2$$

b) Zeigen Sie mit irgendeiner der Vorschriften, die Normen definieren, daß die Abbildung $z \mapsto z^2$ bezüglich dieser Norm in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ stetig ist!

c) M sei der Vektorraum aller reeller $n \times m$-Matrizen. Welche der folgenden Vorschriften definieren Normen auf M?

$$\|A\|_1 = \max_{(i,j)} |a_{ij}|\;,\qquad \|A\|_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|\;,\qquad \|A\|_3 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2\,,$$
$$\|A\|_4 = \max_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2}\,,\qquad \|A\|_5 = \sum_{j=1}^{m} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2}$$

d) Welche der folgenden Punktfolgen (x_n, y_n) aus $\mathbb{R}^2$ ist konvergent für $n \to \infty$, und wohin konvergiert sie?
1) $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{1+n^2}, \frac{1}{n^3}\right)$, *2)* $(x_n, y_n) = \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right)$, *3)* $(x_n, y_n) = \left(e^{-n}, \cos(e^{-n^2})\right)$

e) Was können Sie über eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sagen, deren Niveaulinien konzentrische Kreise um den Nullpunkt sowie die nur aus dem Nullpunkt bestehende Menge sind?

f) Beschreiben Sie den Graphen der Funktion $f(x,y) = 5 - \sqrt{x^2+y^2}$ geometrisch!

g) Wo ist die Funktion f aus der letzten Aufgabe stetig? Wo ist sie differenzierbar?

h) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen nach x, y und z, und bestimmen Sie den Gradienten überall dort, wo er existiert!

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + y^2z + z^2x + xyz\\
g(x,y,z) &= e^{x^2+y^2+z^2} \cdot \cos(xy)\\
h(x,y,z) &= \frac{x+y}{x-z}\\
k(x,y,z) &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\\
\ell(x,y,z) &= ax + by + cz + d
\end{aligned}$$

i) *Richtig oder falsch:* Für die Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ verschwinde die JACOBI-Matrix überall. Dann gibt es einen Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, so daß $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

j) Berechnen Sie, falls die Vorlesung soweit kommt, die HESSE-Matrizen der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned}
f_1&:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; &&(x,y,z) \mapsto x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz\\
f_2&:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; &&(x,y) \mapsto \sin x \cos y\\
f_3&:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; &&(x,y) \mapsto e^{x^2+y^2}\\
f_4&:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; &&(x,y) \mapsto \arctan x + y
\end{aligned}$$