Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, Zimmer C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 1./2. Juli 2003

a) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten der hundert Datenpaare $(\sin^2 k, \cos^2 k)$ für $k = 1, \dots, 100$!

Lösung: Da $\cos^2 k = 1 - \sin^2 k$ für alle k liegen die Datenpaare auf einer Geraden mit negativer Steigung; der Korrelationskoeffizient ist also -1.

b) Was ist die inverse Permutation zu $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$?

Lösung: Vertauschung der beiden Zeilen liefert die Wertetabelle $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; sortieren der ersten Zeile macht daraus die Standarddarstellung $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ von π^{-1}.

c) Schreiben Sie π als Produkt von Transpositionen!

Lösung: Da $\pi(3) = 5$ ist, läßt $\pi \circ (3\ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ die Zahl 5 fest. Diese Permutation wiederum bildet 3 auf 4 ab, also läßt

$$\pi \circ (3\,5) \circ (3\,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (2\,3)$$

zusätzlich auch noch vier fest. Damit ist

$$\pi \circ (3\,5) \circ (3\,4) = (2\,3) \quad \text{und} \quad \pi = (2\,3) \circ (3\,4) \circ (3\,5)\,.$$

d) Ist π gerade oder ungerade?

Lösung: π ist ungerade, da es als Produkt von drei Transpositionen geschrieben werden kann.

e) *Richtig oder falsch:* Die ungeraden Permutationen aus $\mathfrak{S}_n$ bilden eine Gruppe.

Lösung: *Falsch,* denn das Produkt zweier ungerader Permutationen ist gerade, nicht ungerade. Außerdem ist die Identität nicht ungerade.

f) A_π sei die Permutationsmatrix zu $\pi \in \mathfrak{S}_n$, d.h. $a_{ij} = 1$, falls $j = \pi(i)$ und null sonst. Was ist $\det A_\pi$?

Lösung: Permutiert man die Zeilen von A gemäß der Permutation π, erhält man die Einheitsmatrix. Ist π ein Produkt von r Transpositionen, ist die Anwendung von π äquivalent zu r Zeilenvertauschungen, d.h. $\det A = (-1)^r \det E = (-1)^r$. Damit ist

$$\det A = \begin{cases} 1 & \text{falls } \pi \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } \pi \text{ ungerade} \end{cases}.$$

g) Zeigen Sie: Jede Permutation π der Form $i \to j \to k \to i$, die drei Zahlen zyklisch vertauscht, ist gerade.

Lösung: Wegen $\pi(j) = k$ läßt $\pi \circ (j\ k)$ die Zahl k fest. Sie bildet i auf j ab und j auf i, ist also gleich der Transposition $(i\ k)$, und damit ist $\pi = (i\ k) \circ (i\ j)$.

h) Richtig oder falsch: Für $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ist $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

Lösung: $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \det(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$. Diese Determinante entsteht aus $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ durch zyklische Vertauschung der drei Spalten, also, wie wir gerade gesehen haben, durch eine *gerade* Permutation. Damit sind die beiden Determinanten gleich, die Behauptung also richtig.

i) Bestimmen Sie, ohne zu rechnen, den Betrag der Determinanten

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 & 5 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \ !$$

Lösung: Anwendung der Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 7 & 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ auf die Spalten der Matrix führt auf eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen in der Hauptdiagonalen; diese hat Determinante eins. Damit ist $\det A = \pm 1$, der Betrag ist also eins.
(Schreibt man π wie oben als Produkt von Transpositionen, sieht man leicht, daß π eine gerade Permutation ist, d.h. auch $\det A = +1$.)

j) Berechnen Sie die Determinanten

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 10 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 15 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \ !$$

Lösung: Da in der ersten Zeile der Matrix zu D_1 lauter Einsen stehen, bietet sich an, drei von diesen durch Spaltenoperationen zum Verschwinden zu bringen: Subtraktion der ersten Spalte von allen folgenden und anschließende Entwicklung nach der ersten Zeile zeigt, daß

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 10 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & 9 \\ 4 & 4 & 8 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 9 \\ 4 & 8 & 11 \end{vmatrix}$$

ist. Diese Matrix läßt sich nach SARRUS berechnen oder durch nochmalige Anwendung desselben Tricks:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 9 \\ 4 & 8 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 5 \cdot 4 = 1\,.$$

Bei D_2 bietet sich Entwicklung nach der dritten Zeile an; noch einfacher wird es aber, wenn wir vorher die zweite Spalte von der dritten subtrahieren:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Subtrahieren wir nun noch die erste Zeile von der zweiten, bevor wir nach der zweiten Spalte entwickeln, folgt

$$D_2 = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 4\,.$$

Bei D_3 ist fast selbstverständlich, daß wir zunächst nach der dritten Zeile entwickeln:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Als nächstes bietet sich an, die zweite Spalte von der dritten zu subtrahieren und dann nach der dritten zu entwickeln:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4\,.$$

k) Welche Gleichung muß x erfüllen, damit die vier Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \\ x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 2 \\ x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ x \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind?

Lösung: Die Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn ihre Determinante verschwindet. Diese ist

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x & x & 4 \\ x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & x & x \\ x & x & 3 & x \end{vmatrix}\,.$$

Subtraktion der dritten Zeile von der ersten sowie der vierten von der zweiten und anschließende Enwicklung nach der ersten Zeile führt auf

$$D = \begin{vmatrix} 0 & x-2 & 0 & 4-x \\ 0 & 2-x & 0 & 4-x \\ 1 & 2 & x & x \\ x & x & 3 & x \end{vmatrix} = (2-x) \begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ 1 & x & x \\ x & 3 & x \end{vmatrix} - (4-x) \begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x \\ x & x & 3 \end{vmatrix}\,.$$

Addieren wir noch die zweite Zeile zur ersten, vereinfacht sich dies zu

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2(4-x) \\ 0 & 2-x & 0 & 4-x \\ 1 & 2 & x & x \\ x & x & 3 & x \end{vmatrix} = -2(4-x) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2-x & 0 \\ 1 & 2 & x \\ x & x & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4-x)(2-x) \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 3 \end{vmatrix} = 2(4-x)(2-x)(3-x^2)\,.$$

Die Vektoren sind also genau dann linear abhängig, wenn $x = 2$, $x = 4$ oder $x = \pm\sqrt{3}$ ist.

l) *Richtig oder falsch:* Falls die ganzzahlige Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Determinante ± 1 hat, sind a und d teilerfremd zu b und c.

Lösung: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ist durch jeden gemeinsamen Teiler der beiden Zahlen a oder d und b oder c teilbar; falls die Determinante gleich ± 1 ist, kann es daher keinen echten solchen Teiler geben. Daher ist die Behauptung richtig.

m) *Richtig oder falsch:* Falls die ganzzahlige Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine ganzzahlige Matrix als Inverse hat, ist ihre Determinante gleich ± 1.

Lösung: *Richtig,* denn $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$ ist, falls sowohl A als auch A^{-1} ganzzahlige Einträge haben, ein Produkt ganzer Zahlen. Dies ist nur möglich für

$$\det(A) = \det(A^{-1}) = \pm 1\,.$$