WOLFGANG K. SEILER A5, ZIMMER C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 17./18. Juni 2003

a) $\mathbb{C}^2$ sei mit seinem Standard HERMITEschen Produkt ausgestattet. Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix}!$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}&=1\cdot\bar{i}+i\cdot\bar{1}=-i+i=0\\ \begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}&=i\cdot\bar{1}+i\cdot\bar{1}=2i\\ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix}&=\overline{\begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}=-2i\end{aligned}$$

b) Richtig oder falsch: $\mathbb{R}^2$ mit dem Produkt $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}=v_1w_2-v_2w_1$ ist ein EUKLIDischer Vektorraum.

Lösung: *Falsch,* denn das Produkt ist nicht symmetrisch.

c) Was ändert sich, wenn man stattdessen $|\vec{v}\odot\vec{w}|$ als Produkt nimmt?

Lösung: Jetzt ist es zwar symmetrisch, aber nicht mehr linear.

d) Welche der folgenden vier Vorschriften definiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}=\begin{cases}(v_1+2v_2)(w_1+2w_2)+4v_3w_3 & (1)\\ (v_1+2v_2)(w_1+2w_2)-4v_3w_3 & (2)\\ v_1w_2+v_2w_3+v_3w_1 & (3)\\ v_1w_1+2v_2w_2+v_3w_3+v_2(w_1+w_3)+(v_1+v_3)w_2 & (4)\end{cases}$$

Lösung: Die Bilinearität ist in allen Fällen trivial, symmetrisch sind (1), (2) und (4). Positive Semidefinitheit ist klar bei (1), aber das Produkt ist nicht definit, da z.B.

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=0$$

ist. (2) ist nicht einmal positiv semidefinit, denn

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=(1+2)^2-4\cdot2\cdot2=-7\,.$$

Bezüglich (4) ist

$$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=v_1^2+2v_2^2+3v_3^2+2v_2(v_1+v_3)\,.$$

Quadratische Ergänzung führt auf

$$(\nu_1 + \nu_2)^2 + (\nu_2 + \nu_3)^2 + 2\nu_3^2 ,$$

was nie negativ sein kann. Der Ausdruck verschwindet genau dann, wenn alle drei Quadrate verschwinden, d.h.

$$\nu_1 = -\nu_2, \quad \nu_2 = -\nu_3 \quad \text{und} \quad \nu_3 = 0 .$$

Das ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn alle Komponenten ν_i verschwinden. Damit definiert (4) und nur (4) ein Skalarprodukt.

e) *Richtig oder falsch:* Die LORENTZ-Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - c^2t_1t_2$ macht $\mathbb{R}^4$ zum EUKLIDischen Vektorraum.

Lösung: *Falsch,* denn sie ist offensichtlich nicht positiv definit. (Aber trotzdem nützlich!)

f) Gibt es ein HERMITEsches Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$, das nur reelle Werte annimmt?

Lösung: Natürlich nicht; wegen der Linearität im ersten Argument kann jedes HERMITEsche Skalarprodukt jede komplexe Zahl als Wert annehmen.

g) Zeigen Sie: Für zwei beliebige Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ eines EUKLIDischen Vektorraums V gilt: $|\vec{v} + \vec{w}| \le |\vec{v}| + |\vec{w}|$. (*Hinweis:* Quadrieren Sie beide Seiten!)

Lösung: Da Längen von Vektoren nicht negativ sind, ist die zu beweisende Ungleichung äquivalent zur entsprechenden Ungleichung mit beiden Seiten quadriert, also zur Ungleichung $|\vec{v} + \vec{w}|^2 \le \big(|\vec{v}| + |\vec{w}|\big)^2$. Da

$$|\vec{v} + \vec{w}|^2 = (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = |\vec{v}|^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + |\vec{w}|^2$$

und

$$\big(|\vec{v}| + |\vec{w}|\big)^2 = |\vec{v}|^2 + 2\,|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| + |\vec{w}|^2 ,$$

ist diese aber äquivalent zu CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung.

h) Gilt diese Formel auch für HERMITEsche Vektorräume?

Lösung: Ja, denn zwar ist nun $|\vec{v} + \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{v} + |\vec{w}|^2$, aber nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung können wir jedes der beiden Produkte $\vec{v} \cdot \vec{w}$ und $\vec{w} \cdot \vec{v}$ durch $|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$ abschätzen.

i) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraums $x + 2y + 5z = 0$ des $\mathbb{R}^3$ mit seinem Standardskalarprodukt.

Lösung: Zunächst brauchen wir irgendeine Basis dieses Untervektorraums. Als Kern einer surjektiven linearen Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$ ist er zweidimensional, und offensichtlich sind die beiden Vektoren

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zwei linear unabhängige Elemente daraus.

Zur Konstruktion einer Orthogonalbasis nach GRAM-SCHMIDT setzen wir $\vec{c}_1 = \vec{b}_1$ und machen für $\vec{c}_2$ einen Ansatz der Form $\vec{c}_2 = \vec{b}_2 + \lambda\vec{c}_1$.

$$\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -\frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{c}_1}{\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1},$$

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 10 \quad \text{und} \quad \vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2^2 + 1^2 = 5\,.$$

Somit ist $\lambda = -2$ und

$$\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor hat die Länge $\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$, und $\vec{c}_1$ hat, wie wir bereits nachgerechnet haben, Länge $\sqrt{5}$. Daher bilden

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine der gesuchten Orthonormalbasen.

j) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, die den Vektor $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ enthält!

Lösung: Wir ergänzen zu irgendeiner Basis des $\mathbb{R}^3$ und wenden darauf das GRAM-SCHMIDTsche Orthogonalisierungsverfahren an. Zur Rechenersparnis empfiehlt es sich, die neuen Basisvektoren gleich so zu wählen, daß sie auf dem gegebenen Vektor $\vec{b}_1$ senkrecht stehen, also im Untervektorraum $2x + y + 2z = 0$ liegen, z.B.

$$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dann sind $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ bereits orthogonal zueinander, wir müssen also nur noch einen dritten Vektor

$$\vec{c}_3 = \vec{b}_3 + \lambda\vec{b}_1 + \mu\vec{b}_2$$

finden, der auf $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ senkrecht steht.

$$\vec{c}_3 \cdot \vec{b}_1 = \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_1 + \lambda\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 + \mu\vec{b}_2\vec{b}_1 = \lambda \Longrightarrow \lambda = 0$$
$$\vec{c}_3 \cdot \vec{b}_2 = \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 + \lambda\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 + \mu\vec{b}_2\vec{b}_2 = \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 + \mu\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2\,,$$

$$\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{und} \quad \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \Longrightarrow \mu = -\frac{1}{5}$$

Also ist

$$\vec{c}_3 = \vec{b}_3 - \frac{1}{5}\vec{b}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{c}_3 \cdot \vec{c}_3 = \frac{16 + 4 + 25}{25} = \frac{45}{25} = \frac{9}{5}\,.$$

Damit kennen wir auch alle Längen, und die gesuchte Orthonormalbasis besteht beispielsweise aus den Vektoren

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

k) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2+3i \\ 4+3i \\ 6+i \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums von $\mathbb{C}^3$ mit seinem üblichen HERMITEschen Skalarprodukt!

Lösung: Um zunächst eine Orthogonalbasis zu bekommen, ersetzen wir $\vec{b}_2$ durch eine Linearkombination $\vec{c}_2 = \vec{b}_2 + \lambda\vec{b}_1$, die auf $\vec{b}_1$ senkrecht steht. Also ist

$$\vec{c}_2 \cdot \vec{b}_1 = \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 + \lambda\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1}\,.$$

Hier ist

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2+3i \\ 4+3i \\ 6+i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 6 \end{pmatrix} = (2+3i)\cdot 2 + (4+3i)\cdot(-3i) + (6+i)\cdot 6 = 49$$

und

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 6 \end{pmatrix} = 2^2 + 3^2 + 6^2 = 49\,.$$

Somit ist $\lambda = -1$ und

$$\vec{c}_2 = \vec{b}_2 - \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2+3i \\ 4+3i \\ 6+i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{c}_2 \cdot \vec{c}_2 = 3^2 + 4^2 + 1^2 = 26\,.$$

Damit bilden die beiden Vektoren

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} 3i \\ 4 \\ i \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis des von $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ erzeugten Untervektorraums.

l) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$!

Lösung: Wir wenden das GRAM-SCHMIDTsche Orthogonalisierungsverfahren an auf die Spalten von A: Die erste Spalte ist das Dreifache des zweiten Koordinateneinheitsvektors, also ist die erste Spalte von Q gerade diser Vektor, und die erste Spalte von R enthält als ersten Eintrag eine Drei, sonst lauter Nullen:

$$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Für einen dazu orthogonalen Vektor $\vec{c}_2$ machen wir mit dem zweiten Spaltenvektor $\vec{a}_2$ von A den Ansatz $\vec{q}_2 = \vec{a}_2 + \lambda\vec{q}_1$; die Bedingung $\vec{q}_2 \cdot \vec{q}_1 = 0$ führt dann auf

$$\lambda = -\frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{q}_1}{\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_1} = -2, \quad \text{d.h.} \quad \vec{c}_2 = \vec{a}_2 - 2\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Dieser Vektor hat die Länge $\sqrt{2}$, also setzen wir

$$\vec{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\vec{a}_2 = 2\vec{q}_1 + \vec{c}_2 = 2\vec{q}_1 + \sqrt{2}\vec{q}_2, \quad \text{d.h.} \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix}2\\\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}.$$

Nun suchen wir einen zu $\vec{q}_1$ und $\vec{q}_2$ orthogonalen Vektor der Form $\vec{c}_3 = \vec{a}_3 + \lambda\vec{q}_1 + \mu\vec{q}_2$; dabei ist

$$\lambda = -\frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{q}_1}{\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_1} = -1 \quad \text{und} \quad \mu = -\frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{q}_2}{\vec{q}_2 \cdot \vec{q}_2} = -2\sqrt{2},$$

also

$$\vec{c}_3 = \vec{a}_3 - \vec{q}_1 - 2\sqrt{2}\vec{q}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} = \vec{0},$$

wir bekommen also keinen neuen Basisvektor, sondern nur die Darstellung

$$\vec{a}_3 = \vec{q}_1 + 2\sqrt{2}\vec{q}_2.$$

Wir erhalten damit keine neue Spalte von Q, aber $\vec{r}_3 = \begin{pmatrix}1\\2\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ als dritte Spalte von R.

Im nächsten Schritt suchen wir daher noch einmal nach einem Vektor $\vec{c}_3$, der auf $\vec{q}_1$ und $\vec{q}_2$ senkrecht steht, dieses Mal von der Form $\vec{c}_3 = \vec{a}_4 + \lambda\vec{q}_1 + \mu\vec{q}_2$. Hier ist

$$\lambda = -\frac{\vec{a}_4 \cdot \vec{q}_1}{\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_1} = 0 \quad \text{und} \quad \mu = -\frac{\vec{a}_4 \cdot \vec{q}_2}{\vec{q}_2 \cdot \vec{q}_2} = -3\sqrt{2},$$

wir erhalten also wieder den Nullvektor. Als vierte und letzte Spalte von R bekommen wir

$$\vec{r}_4 = \begin{pmatrix}0\\3\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}.$$

Was noch fehlt ist die letzte Spalte von Q; da wir alle Spalten von A bereits aus den ersten beiden Spalten von A linear kombinieren können, müssen wir $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ einfach auf irgendeine Weise zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ergänzen. Dazu könnten wir GRAM-SCHMIDT auf den ersten oder dritten Einheitsvektor anwenden; andererseits sieht man aber auch sofort, daß – genau wie $\binom{1}{1}$ und $\binom{1}{-1}$ orthogonal zueinander sind – der Vektor

$$\vec{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

die Orthonormalbasis vervollständigt. Somit ist

$$Q = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Natürlich ist nicht nur $A = QR$, sondern, da wir die dritte Spalte von Q nicht brauchen, auch

$$A = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$