WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 10./11. Juni 2003

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix M der linearen Abbildung φ mit $\binom{x}{y} \mapsto \binom{-3x-4y}{2x+3y}$ bezüglich der Basis aus den beiden Vektoren $\binom{1}{-1}$ und $\binom{2}{-1}$!

Lösung: Wegen $\binom{1}{-1} \mapsto \binom{1}{-1}$ und $\binom{2}{-1} \mapsto \binom{-2}{1}$ wird der eine Vektor der neuen Basis auf sich selbst abgebildet, der andere auf sein Negatives. Damit ist $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Benutzen dies, um die Matrix $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{99}$ zu berechnen!

Lösung: Die zu potenzierende Matrix A ist die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung φ aus *a)* bezüglich der Standardbasis; A^{99} ist also, ebenfalls bezüglich der Standardbasis, die Abbildungsmatrix der 99-maligen Hintereinanderausführung von φ.

Bezüglich der in *a)* betrachteten Basis hat φ die Diagonalmatrix M als Abbildungsmatrix. Für diese ist $M^e = M$ für ungerades e und $M^e = E$ für gerades e. Damit ist auch die e-fache Hintereinanderausführung von φ für ungerades e gleich φ und für gerades e gleich der Identität. Da 99 ungerade ist, ist die 99-fache Hintereinanderausführung von φ wieder φ selbst, hat also bezüglich der Standardbasis die Abbildungsmatrix A. Somit ist $A^{99} = A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(Alternativ: $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ läßt sich schreiben als $A = B^{-1}MB$ mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Damit ist

$$A^{99} = \underbrace{B^{-1}MB \cdot B^{-1}MB \cdot \;\cdots\; B^{-1}MB \cdot B^{-1}MB}_{99 \text{ Faktoren}} = B^{-1}M^{99}B = B^{-1}MB = A\,,$$

denn die Zwischenfaktoren $B \cdot B^{-1} = E$ fallen heraus und $M^{99} = M$. Wie die Matrix B und ihr Inverses konkret aussehsen, ist in diesem einfachen Fall irrelevant; bei weniger trivialen Problemen muß man sie natürlich berechnen und auch $B^{-1}M^{99}B$ wirklich ausrechnen.)

c) Überlegen Sie sich, daß die komplexen Zahlen $1+i$ und $1-i$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$ bilden und konstruieren Sie Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so daß gilt

$$a + ib = \lambda(1+i) + \mu(1-i) \iff A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \wedge B\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\,!$$

Lösung: Da die Vektoren der zweiten Basis schon durch die erste ausgedrückt sind, sehen wir sofort, daß (hier nicht nur symbolisch, sondern als echte Matrixgleichung über $\mathbb{C}$)

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{ist; mit} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ist somit $A = {}^tM^{-1}$ und $B = A^{-1} = {}^tM$. Damit ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\,.$$

Alternativ kann man B auch direkt berechnen durch Ausmultiplizieren:

$$\lambda(1+i)+\mu(1-i)=(\lambda+\mu)1+(\lambda-\mu)i\,.$$

Daraus läßt die die Matrix B direkt ablesen, und A ist natürlich invers dazu.

d) Zeigen Sie, daß die TSCHEBYSCHEFF-Polynome

$$T_0=1,\quad T_1=x,\quad T_2=2x^2-1\quad\text{und}\quad T_3=4x^3-3x$$

eine Basis des Vektorraums aller reeller Polynome vom Grad höchstens drei bilden, und bestimmen Sie die Matrizen A, B für die gilt: Ist

$$\begin{array}{l} a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 \\ =b_3T_3+b_2T_2+b_1T_1+b_0T_0 \end{array},\ \text{so ist}\quad A\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_0\\ \vdots\\ b_3\end{pmatrix}\ \text{und}\ B\begin{pmatrix}b_0\\ \vdots\\ b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_3\end{pmatrix}\ !$$

Lösung: Da die TSCHEBYSCHEFF-Polynome verschiedene Grade haben, müssen sie linear unabhängig sein; da auch die Anzahl stimmt, bilden sie also eine Basis.
Die Matrix der Koeffizienten, mit denen sie als Linearkombination der x-Potenzen dargestellt sind, ist

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&2&0\\0&-3&0&4\end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$B={}^tM=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-3\\0&0&2&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad A=B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&\frac34\\0&0&\frac12&0\\0&0&0&\frac14\end{pmatrix}$$

Alternativ: Ausmultiplizieren zeigt, daß

$$\begin{aligned}b_3T_3+b_2T_2+b_1T_1+b_0T_0&=b_3(4x^3-3x)+b_2(2x^2-1)+b_1x+b_0\\&=4b_3x^3+2b_2x^2+(-3b_3+b_1)x+(-b_2+b_0)\end{aligned}$$

ist, d.h.

$$\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-3\\0&0&2&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_0\\b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

Damit ist B bekannt, und $A=B^{-1}$ wird wie bei der ersten Alternative nach GAUSS berechnet.

e) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-2&-3&-4&-5\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$!

Lösung: Wir schreiben eine Einheitsmatrix hinter A:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&&1&0&0&0\\-2&-3&-4&-5&&0&1&0&0\\1&0&0&0&&0&0&1&0\\0&1&0&0&&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Für die erste Spalte addieren wir die erste Zeile zweimal zur zweiten und subtrahieren sie von der dritten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entsprechend behandeln wir die zweite Spalte: Wir addieren zweimal die zweite Zeile zur dritten und subtrahieren sie von der vierten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schließlich addieren wir noch zweimal die dritte Zeile zur vierten und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hier steht links eine obere und rechts eine untere Dreiecksmatrix, also ist

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

f) Schreiben Sie A als Produkt einer unteren und einer oberen Dreiecksmatrix!

Lösung: Wir wissen, daß $LA = R$ ist, also $A = L^{-1}$. Um A als Produkt einer unteren und einer oberen Dreiecksmatrix zu schreiben, müssen wir also noch A invertieren. Der GAUSS-Algorithmus führt auf

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

g) Bestimmen Sie zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Dreiecksmatrizen L, R mit $LA = R$!

Lösung: Gleiches Verfahren: Wir schreiben eine Einheitsmatrix hinter die gegebene Matrix:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da die Hauptnenner der Zeilen teilweise schon recht groß sind, ist es wahrscheinlich am besten, sich an die Regeln der Bruchrechnung zu erinnern und sie stur anzuwenden: Wir subtrahieren zunächst zwei Drittel der ersten Zeile von der zweiten und die halbe erste Zeile von der dritten:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{30} & & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{30} & \frac{1}{24} & & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann muß noch sechs Fünftel der zweiten Zeile von der dritten subtrahiert werden:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{30} & & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{600} & & \frac{3}{10} & -\frac{6}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

Damit sind wir fertig und haben das Ergebnis

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{30} \\ 0 & 0 & \frac{1}{600} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{3}{10} & -\frac{6}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

h) Berechnen Sie A^{-1} mit Hilfe der Matrizen L und R!

Lösung: Aus $LA = R$ folgt $A = L^{-1}R$ oder $A^{-1} = R^{-1}L$. Hier ist

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -24 & 180 \\ 0 & 36 & -720 \\ 0 & 0 & 600 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = R^{-1}L = \begin{pmatrix} 72 & -240 & 180 \\ -240 & 900 & -720 \\ 180 & -720 & 600 \end{pmatrix}.$$

i) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} &= a \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} &= b \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6} &= c \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a, b, c \in \mathbb{R}$!

Lösung: Nachdem wir A^{-1} schon kennen, können wir einfach sagen, daß $A\vec{x} = \vec{b}$ die Lösung $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ hat, d.h.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 & -240 & 180 \\ -240 & 900 & -720 \\ 180 & -720 & 600 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72a - 240b + 180c \\ -240a + 900b - 720c \\ 180a - 720b + 600c \end{pmatrix}.$$

(An den großen Koeffizienten hier sieht man übrigens auch, warum Gleichungssysteme dieser Art so empfindlich auf Störungen der rechten Seite und damit auch auf Rundungsfehler reagieren; entsprechende Matrizen der Größen 6×6 und 15×15 hatten wir bereits betrachtet bei der Diskussion der Schwierigkeiten beim numerischen Lösen linearer Gleichungssysteme.)