Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515
A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 10./11. Juni 2003

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix M der linearen Abbildung φ mit $\binom{x}{y} \mapsto \binom{-3x-4y}{2x+3y}$ bezüglich der Basis aus den beiden Vektoren $\binom{1}{-1}$ und $\binom{2}{-1}$!

b) Benutzen dies, um die Matrix $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{99}$ zu berechnen!

c) Überlegen Sie sich, daß die komplexen Zahlen $1+i$ und $1-i$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$ bilden und konstruieren Sie Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so daß gilt

$$a + ib = \lambda(1+i) + \mu(1-i) \iff A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \wedge B\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}!$$

d) Zeigen Sie, daß die Tschebyscheff-Polynome

$$T_0 = 1, \quad T_1 = x, \quad T_2 = 2x^2 - 1 \quad \text{und} \quad T_3 = 4x^3 - 3x$$

eine Basis des Vektorraums aller reeller Polynome vom Grad höchstens drei bilden, und bestimmen Sie die Matrizen A, B für die gilt: Ist

$$\begin{aligned} &a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= b_3T_3 + b_2T_2 + b_1T_1 + b_0T_0 \end{aligned}, \text{ so ist } \quad A\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ und } B\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix}!$$

e) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$!

f) Schreiben Sie A als Produkt einer unteren und einer oberen Dreiecksmatrix!

g) Bestimmen Sie zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Dreiecksmatrizen L, R mit $LA = R$!

h) Berechnen Sie A^{-1} mit Hilfe der Matrizen L und R!

i) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} &= a \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} &= b \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6} &= c \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a, b, c \in \mathbb{R}$!