WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 3./4. Juni 2003

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems (aus der Scheinklausur 2002)

$$\begin{aligned} aw + x + 2y + z &= a + 2 && (1)\\ -aw + x - 4y + z &= a - 2 && (2)\\ -aw + 2x + (2a-1)y + 5z &= 2a + 4 && (3)\\ -3aw - 5x + 2ay + az &= 4 - 3a && (4) \end{aligned}$$

Lösung: Zur Elimination von w aus den letzen drei Gleichungen addieren wir dreimal die erste Gleichung zur letzten, und wir addieren sie jeweils einfach zur zweiten und zur dritten:

$$\begin{aligned} 2x - 2y + 2z &= 2a && (7)\\ x - y + z &= a && (7')\\ 3x + (2a+1)y + 6z &= 3a + 6 && (8)\\ -2x + (2a+6)y + (a+3)z &= 10 && (9) \end{aligned}$$

(Gleichung $(7')$ ist die der Übersichtlichkeit halber durch zwei dividierte Gleichung (7).)
Als nächstes soll y aus den Gleichungen (8) und (9) eliminiert werden; dazu subtrahieren wir dreimal Gleichung $(7')$ von (8) und addieren ihr Doppeltes (also Gleichung (7)) zu Gleichung (9):

$$\begin{aligned} (2a+4)y + 3z &= 6 && (10)\\ (2a+4)y + (a+5)z &= 2a + 10 && (11) \end{aligned}$$

Subtraktion dieser beiden Gleichungen voneinander liefert die Gleichung

$$(a+2)z = (2a+4)$$

Für $a \neq -2$ können wir kürzen und erhalten $z = 2$; für $a = -2$ haben wir die Gleichung $0 \cdot z = 0$, aus der nichts folgt.
Für $a \neq -2$ können wir $z = 2$ in Gleichung (10) einsetzen und erhalten

$$(a+2)y + 3 \cdot 2 = 6, \quad \text{also} \quad y = 0\,,$$

denn für $a \neq -2$ ist $a + 2 \neq 0$.
Gleichung $(7')$ wird nach Einsetzen von $z = 2$ und $y = 0$ zu

$$x + 2 = a \quad \text{oder} \quad x = a - 2\,.$$

Das müssen wir nun nur noch in Gleichung (1) einsetzen:

$$aw + (a-2) + 0 + 2 = a + 2 \quad \text{oder} \quad aw = 2\,.$$

Für $a \neq 0$ folgt daraus $w = \dfrac{2}{a}$; für $a = 0$ ist das Gleichungssystem unlösbar.
Fehlt noch der Fall $a = -2$. Dann wird Gleichung (10) zu

$$0y + 3z = 6, \qquad \text{d.h.} \quad z = 2 \quad \text{und} \quad y = \lambda \in \mathbb{R} \ \text{beliebig.}$$

Einsetzen in Gleichung (7') zeigt, daß

$$x - \lambda + 2 = a = -2 \quad \text{oder} \quad x = \lambda - 4$$

ist, woraus nach Gleichung (1) folgt, daß

$$-2w + (\lambda - 4) + 2\lambda + 2 = 4 \quad \text{oder} \quad w = \frac{3}{2}\lambda - 1\,.$$

Insgesamt ist also

$$\mathcal{L}_a = \begin{cases} \{(\frac{2}{a}, a-2, 0, 2)\} & \text{für } a \neq 0 \text{ und } a \neq -2 \\ \{(\frac{3}{2}\lambda - 1, \lambda - 4, \lambda, 2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} & \text{für } a = -2 \\ \emptyset & \text{für } a = 0 \end{cases}.$$

b) F_a bezeichne die Menge aller stetiger Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die an der Stelle Null den Wert $a \in \mathbb{R}$ annehmen. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist F_a ein Vektorraum?

Lösung: Offensichtlich höchstens für $a = 0$, denn nur dann liegt die Nullfunktion in F_a. Für $a = 0$ ist F_0 ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, den für $f, g \in F_0$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist

$$(\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = 0\,,$$

so daß auch $\lambda f + \mu g$ in F_0 liegt.

c) Finden Sie für vorgegebenes $a \in \mathbb{R}$ einen Vektorraum V, so daß das Paar (F_a, V) ein affiner Raum ist!

Lösung: Für $f, g \in F_a$ ist $(f - g)(0) = f(0) - g(0) = a - a = 0$, die Differenz $f - g$ liegt also in F_0. Dies läßt erwarten, daß (F_a, F_0) ein affiner Raum sein sollte mit

$$\varphi\colon \begin{cases} F_a \times F_a \to F_0 \\ \quad (f, g) \mapsto g - f \end{cases}.$$

Für festes $f \in F_a$ ist die Abbildung $\varphi_f\colon \begin{cases} F_a \to F_0 \\ \ g \mapsto g - f \end{cases}$ in der Tat bijektiv, denn die Abbildung $\psi_f\colon \begin{cases} F_0 \to F_a \\ \ h \mapsto f + h \end{cases}$ ist offensichtlich invers dazu.

d) Richtig oder falsch: Ist $n < m$ und hat $A \in k^{n \times m}$ den Rang n, so gibt es eine Matrix $B \in k^{m \times n}$ mit $AB = E$.

Lösung: *Richtig,* denn da der Zeilenrang einer Matrix gleich dem Spaltenrang ist, kann eine $n \times r$-Matrix für kein r einen größeren Rang als n haben; insbesondere gilt dies auch für jede um eine Spalte der Einheitsmatrix erweiterte Matrix. Diese Matrizen sich aber die erweiterten Matrizen der Gleichungssysteme für die Spalten von B, die somit allesamt lösbar sind.

e) Richtig oder falsch: Ist $n < m$ und hat $A \in k^{n \times m}$ den Rang n, so gibt es eine Matrix $B \in k^{m \times n}$ mit $BA = E$.

Lösung: *Falsch,* denn bei der Multiplikation BA stehen die Koeffizienten der unbekannten Einträge von B in den *Spalten* von A; für jede Zeile von B haben wir also ein Gleichungssystem aus m Gleichungen in n Unbekannten. Die erweiterte Matrix eines solchen Gleichungssystems ist daher eine $(n + 1) \times m$-Matrix, und die kann ohne weiteres auch Rang $n + 1$ haben.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hier hat die Gleichung $AB = E$ viele Lösungen, nämlich alle Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1-\lambda & -\mu \\ -\lambda & 1-\mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$, aber $BA = E$ ist unlösbar: Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ des Gleichungssystems bekommt bei Erweiterung um eine Spalte der Einheitsmatrix stets den Rang drei.

f) Bestimmen Sie alle Matrizen X, für die gilt $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$!

Lösung: Wir schreiben die beiden Matrizen hintereinander

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und beginnen dann mit der GAUSS-Elimination: Zuerst wird die erste Zeile einfach von der zweiten und dreifach von der dritten subtrahiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Als nächstes suibtrahieren wir die zweite Zeile von der dritten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit stehen unter der Hauptdiagonalen lauter Nullen; oberhalb der Hauptdiagonalen gibt es nur in der ersten Zeile noch von Null verschiedene Einträge, die wir zum Verschwinden bringen, indem wir die zweite Zeile addieren und die dritte zweifach subtrahieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abgesehen vom Minuszeichen in der zweiten Zeile steht nun links die Einheitsmatrix, wir müssen also nur noch die zweite Zeile mit -1 multiplizieren und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit gibt es genau die eine Lösung

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

g) Berechnen Sie die inversen Matrizen von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & \lambda & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$!

Lösung: Wir schreiben die Einheitsmatrix hinter A:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Da unter der Hauptdiagonalen schon lauter Nullen stehen, müssen wir keine Eliminationsschritte durchführen; wir beginnen also gleich damit, die vierte Zeile viermal von der ersten, dreimal von der zweiten und zweimal von der dritten zu subtrahieren:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Als nächstes wird die dritte Zeile dreimal von der ersten und zweimal von der zweiten subtrahiert:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Als letztes muß noch zweimal die zweite Zeile von der ersten subtrahiert werden:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nun steht links die Einheitsmatrix, rechts also die inverse Matrix zu A, d.h.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ganz entsprechend wird auch B nach rechts um eine Einheitsmatrix erweitert:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & \lambda & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Hier sind Eliminationsschritte notwendig; wir subtrahieren zunächst die erste Zeile dreimal von der zweiten und einmal von der dritten:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-6 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Als nächstes vertauschen wir, um die weitere Rechnung zu vereinfachen, die zweite und die dritte Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-6 & -1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Dann kann die Elimination ohne Division fortgeführt werden durch Subtraktion von $(\lambda-6)$ mal der zweiten Zeile von der dritten:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda-9 & 1 & 6-\lambda \end{array}\right)$$

Nun stehen unterhalb der Hauptdiagonalen von B nur noch Nullen, und wir können zu den Einträgen oberhalb der Diagonalen übergehen. Als erstes addieren wir die dritte Zeile zur ersten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \lambda-8 & 1 & 6-\lambda \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda-9 & 1 & 6-\lambda \end{pmatrix}$$

Als nächstes wird zweimal die zweite Zeile von der ersten subtrahiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda-6 & 1 & 4-\lambda \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda-9 & 1 & 6-\lambda \end{pmatrix}$$

Schließlich muß noch die letzte Zeile mit -1 multipliziert werden, damit links eine Einheitsmatrix entsteht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda-6 & 1 & 4-\lambda \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9-\lambda & -1 & \lambda-6 \end{pmatrix}$$

Damit ist $B^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda-6 & 1 & 4-\lambda \\ -1 & 0 & 1 \\ 9-\lambda & -1 & \lambda-6 \end{pmatrix}$; insbesondere ist B also für jedes λ invertierbar.

h) Für welche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ invertierbar?

Lösung: Die Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie den maximal möglichen Rang drei hat. Der dritte Spaltenvektor ist offenbar stets linear unabhängig von den ersten beiden, denn er hat als einziger eine nichtverschwindende dritte Komponente. Damit sind die drei Spaltenvektoren genau dann linear abhängig, wenn die ersten beiden linear abhängig sind, d.h. wenn $c = 0$ ist. Die Matrix ist daher genau dann invertierbar, wenn c nicht verschwindet.

i) Berechnen Sie in den invertierbaren Fällen die inverse Matrix A^{-1}!

Lösung: Wir nehmen an, daß c nicht verschwindet. Dann schreiben wir die Einheitsmatrix hinter die Matrix A:

$$\begin{pmatrix} -1 & a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & d & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikation der ersten und dritten Zeile mit -1 sowie der zweiten mit $1/c$ macht daraus

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & -b & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{d}{c} & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Addition von b-mal der dritten Zeile zur ersten und $-d/c$-mal der dritten Zeile zur zweiten führt auf

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & -1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{c} & \frac{d}{c} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Schließlich wird noch a-mal die zweite Zeile zur ersten addiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{a}{c} & \frac{ad}{c}-b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{c} & \frac{d}{c} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Nun steht links die Einheitsmatrix, rechts also die inverse Matrix zu A, d.h.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{a}{c} & \frac{ad}{c} - b \\ 0 & \frac{1}{c} & \frac{d}{c} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

j) Richtig oder falsch: Für alle $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ invertierbar.

Lösung: *Richtig,* denn wenn sie nicht invertierbar wäre, müßten der Rang kleiner als zwei sein, die beiden Spalten also linear abhängig sein. Da die erste Spalte nicht der Nullvektor ist, gäbe es also ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß die zweite Spalte das λ-fache der ersten wäre. Dazu müßte $\lambda = -b/a = a/b$ sein, also $-b^2 = a^2$. Das ist aber für $a, b \neq 0$ unmöglich, denn das Quadrat einer reellen Zahl ungleich null ist stets positiv.
(Alternativ könnte man sich daran erinnern, daß die Matrix gerade die Abbildungsmatrix der Multiplikationsabbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zum Faktor $a + bi$ ist; diese ist bijektiv, also ist ihre Matrix invertierbar.)

k) Richtig oder falsch: Für alle $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ invertierbar.

Lösung: *Falsch,* denn für komplexe Zahlen können die beiden Spalten proportional werden: Die oben abgeleitete Beziehung $-b^2 = a^2$ zeigt im Komplexen nur, daß $b = \pm ia$ sein muß. Damit ist beispielsweise für $a = 1$ und $b = i$ die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar.

l) Zeigen Sie: Falls für zwei invertierbare Matrizen $A, B \in k^{n \times n}$ gilt $AB + BA = 0$, so ist auch $A^{-1}B^{-1} + B^{-1}A^{-1} = 0$.

Lösung: $AB + BA = 0 \implies AB = -BA \implies (AB)^{-1} = -(BA)^{-1} \implies B^{-1}A^{-1} = -A^{-1}B^{-1} \implies A^{-1}B^{-1} + B^{-1}A^{-1} = 0$.

m) Die lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ habe bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ die Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -21 & 11 \end{pmatrix}$. Welche Abbildungsmatrix hat sie bezüglich der Basis aus den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$?

Lösung: In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren, dargestellt als Linearkombinationen der Basisvektoren. Hier ist

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -21 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -21 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 35 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Der erste Basisvektor wird also einfach mit vier multipliziert und der zweite mit fünf. Die Abbildungsmatrix bezüglich der neuen Basis ist daher die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} .$$