Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 27./28. Mai 2003

a) Der Untervektorraum U von $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ habe die Funktionen $\sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \sin 3t$ und $\cos 3t$ als Basis. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\varphi\colon U \to U;\ f \mapsto \frac{df}{dt}$!

Lösung: Wir müssen die Bilder der Basisvektoren bestimmen:

$$\begin{aligned}
\varphi(\sin t) &= \frac{d}{dt}\sin t = \cos t\\
\varphi(\cos t) &= \frac{d}{dt}\cos t = -\sin t\\
\varphi(\sin 2t) &= \frac{d}{dt}\sin 2t = 2\cos 2t\\
\varphi(\cos 2t) &= \frac{d}{dt}\cos 2t = -2\sin 2t\\
\varphi(\sin 3t) &= \frac{d}{dt}\sin 3t = 3\cos 3t\\
\varphi(\cos 3t) &= \frac{d}{dt}\cos 3t = -3\sin 3t
\end{aligned}$$

Damit ist zunächst klar, daß die Abbildung den Untervektorraum U wirklich auf sich selbst abbildet. Da die Bilder der Basisvektoren einfach Vielfache anderer Basisvektoren sind, hat jede Spalte der Abbildungsmatrix bezüglich der angegebenen Basis genau einen Eintrag; die Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z\\ x\\ y\end{pmatrix}$ bezüglich der Basis aus den drei Einheitsvektoren!

Lösung: Nimmt man die drei Einheitsvektoren in ihrer üblichen Reihenfolge, ist die Abbildungsmatrix wegen

$$\psi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \psi\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad \psi\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

gleich $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung

$$\omega\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}\quad \text{bezüglich der Basis } \mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\} \text{ von } \mathbb{R}^2\ !$$

Lösung: $\omega\left(\binom{1}{1}\right) = \binom{1}{1}$ und $\omega\left(\binom{1}{-1}\right) = \binom{-1}{1} = -\binom{1}{-1}$; der erste Basisvektor wird also auf sich selbst abgebildet und der zweite auf sein negatives. Damit ist die Abbildungsmatrix gleich der Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

d) Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Produkte AB und BA!

Lösung: Die Rechenschemata

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

zeigen, daß $AB = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ und $BA = \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ist.

e) Zeigen Sie: Für alle $a, b \in k$ ist $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösung: Einfach nach Schema F miteinander multiplizieren.

f) Für alle $a \in k$ und $n \in \mathbb{Z}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Für $n < 0$ soll dabei A^n die inverse Matrix von A^{-n} bezeichnen – falls diese existiert.

Lösung: Für $n \in \mathbb{N}$ ist das ein einfacher Induktionsbeweis: Für $n = 1$ steht offensichtlich auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens dieselbe Matrix, und für $n > 1$ ist nach Induktionsannahme und der Formel aus der vorigen Aufgabe

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n-1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $n < 0$ ist $-n \in \mathbb{N}$, nach der vorigen Aufgabe und dem bereits bewiesenen ist also

$$\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-n} = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (-n)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & na - na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und entsprechend auch für das Produkt in der anderen Reihenfolge; die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist also invers zu $\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-n}$. Für $n = 0$ schließlich haben wir eine nullte Potenz, ein leeres Produkt also, und das wird nach der üblichen Konvention als Neutralelement bezüglich der Multiplikation definiert, d.h. als Einheitsmatrix.

g) Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl n ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$.

Lösung: Auch das ist wieder ein Fall für eine vollständige Induktion: Für $n = 1$ ist $3^{n-1} = 3^0 = 1$, die Behauptung ist also richtig.

Für $n > 1$ ist nach Induktionsannahme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n-2} & 3^{n-2} & 3^{n-2} \\ 3^{n-2} & 3^{n-2} & 3^{n-2} \\ 3^{n-2} & 3^{n-2} & 3^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Im rechtsstehenden Produkt wird für jeden Eintrag der Produktmatrix die Zahl 3^{n-2} dreimal mit Eins multipliziert; die Addition dieser Produkte ergibt 3^{n-1}. Also haben alle Einträge der n-ten Potenz den Wert 3^{n-1}, und die Behauptung ist bewiesen.

h) Gilt diese Formel auch für $n = -1$?

Lösung: Für $n = -1$ besagt die Behauptung, daß

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3^{-2} & 3^{-2} & 3^{-2} \\ 3^{-2} & 3^{-2} & 3^{-2} \\ 3^{-2} & 3^{-2} & 3^{-2} \end{pmatrix}$$

ist, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{-2} & 3^{-2} & 3^{-2} \\ 3^{-2} & 3^{-2} & 3^{-2} \\ 3^{-2} & 3^{-2} & 3^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{-1} & 3^{-1} & 3^{-1} \\ 3^{-1} & 3^{-1} & 3^{-1} \\ 3^{-1} & 3^{-1} & 3^{-1} \end{pmatrix}$$

müßte die Einheitsmatrix sein, was offensichtlich nicht der Fall ist. Also gilt die Behauptung nicht für $n = -1$, und in der Tat ist die Matrix mit lauter Einsen als Einträgen offensichtlich nicht invertierbar: Sie ist schließlich die Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung, die den gesamten $\mathbb{R}^3$ abbildet auf den vom Vektor $(1,1,1)$ erzeugten Untervektorraum, und diese Abbildung ist nicht umkehrbar.

i) Die $n \times n$-Matrix A habe nur Nullen und Einsen als Einträge. Finden Sie Schranken u_m und o_m, so daß für jeden Eintrag b der Matrix A^m gilt: $u_m \le b \le o_m$!

Lösung: Der ik-Eintrag der Matrix A^2 berechnet sich als $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{jk}$; da die Einträge von A allesamt Null oder Eins sind, gilt dasselbe für die Produkte $a_{ij}a_{jk}$, deren Summe somit zwischen Null und n liegt. Multipliziert man diese Matrix nochmals mit A, so erhält man Summen aus n Summanden, die allesamt zwischen Null und n liegen, die Summe liegt also zwischen Null und n^2, *usw.*

Allgemein wird man daher vermuten, daß die Einträge von A^m zwischen Null und n^{m-1} liegen, was man in der Tat leicht mittels vollständiger Induktion nachweisen kann:

Für $m = 1$ ist dies gerade die Voraussetzung, daß alle Einträge von A Null oder Eins sind.

Für $m > 1$ habe A^{m-1} die Einträge b_{ij}, von denen wir nach Induktionsannahme wissen, daß sie zwischen Null und n^{m-2} liegen. Für den ik-Eintrag der Matrix $A^m = A^{m-1}A$ ist dann

$$0 \le \sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{jk} \le \sum_{j=1}^{n} n^{m-2} \cdot 1 = n \cdot n^{m-2} = n^{m-1} .$$

Also können wir $u_m = 0$ und $o_m = n^{m-1}$ setzen.

Die angegebenen Schranken sind optimal, denn nimmt man für A die Nullmatrix, sind auch alle Einträge von A^m Null, und falls alle Einträge von A gleich Eins sind, sind die Einträge von A^m nach demselben Induktionsbeweis wie eben alle gleich n^{m-1}.

j) Welche der folgenden Matrizen sind invertierbar?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung: A_1 ist die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung, die den ersten Basisvektor mit dem vierten und den zweiten mit dem dritten vertauscht; da diese Abbildung ihre eigene Umkehrabbildung ist, ist auch A_1 seine eigene inverse Matrix; insbesondere ist also A_1 invertierbar.

Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Spaltenvektoren von A_2 ist stets der Vektor mit lauter Einsen als Einträgen; die zugehörige lineare Abbildung hat also nur ein zweidimensionales Bild (aufgespannt etwa von irgendeinem der Spaltenvektoren und dem Vektor mit lauter Einsen als Einträgen) und ist somit nicht invertierbar, genauso wenig wie A_2.

Die vier Spaltenvektoren von A_3 bilden eine Basis des $\mathbb{R}^4$, die zu A_3 gehörige lineare Abbildung ist also surjektiv und damit nach der Dimensionsformel auch injektiv, also bijektiv und somit umkehrbar. Damit ist auch A_3 invertierbar.

In A_4 schließlich ist die dritte Spalte Summe der ersten beiden, die zugehörige lineare Abbildung ist also nicht surjektiv, und damit ist A_4 nicht invertierbar.

(Wenn man über die (Spalten-)Ränge argumentieren möchte: $\operatorname{Rang} A_1 = \operatorname{Rang} A_3 = 4$ und $\operatorname{Rang} A_2 = \operatorname{Rang} A_4 = 2$.)

k) Bestimmen Sie alle Lösungen des reellen linearen Gleichungssystems

$$x - y - z + u = 0, \quad x + y - z = 0, \quad 3x + 2y - z - u = 0 \quad \text{und} \quad 2x + 3y - 2u = 0\,!$$

Ist die Lösungsmenge ein Vektorraum?

Lösung: Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten sowie ihres Drei- *bzw.* Zweifachen von der zweiten *bzw.* dritten führt auf die drei Gleichungen

$$2y - u = 0, \quad 5y + 2z - 4u = 0 \quad \text{und} \quad 5y + 2z - 4u = 0\,.$$

Die beiden letzten Gleichungen sind offensichtlich identisch, es reicht also sie einmal zu betrachten.

Da alles so einfach ist, können wir hier *ad hoc* weitermachen: Die erste Gleichung zeigt, daß $u = 2y$ sein muß; setzt man dies in die verbleibende Gleichung ein, ergibt sich

$$5y + 2z - 8y = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{2z}{3}\,.$$

Für z können wir somit eine beliebige reelle Zahl λ einsetzen; dann ist $y = \frac{2}{3}\lambda$ und $u = \frac{4}{3}\lambda$. Wie die erste Gleichung zeigt, ist weiter

$$x = y + z - u = \frac{2}{3}\lambda + \lambda - \frac{4}{3}\lambda = \frac{\lambda}{3}\,;$$

setzen wir zur Vermeidung von Nennern $\lambda = 3\mu$, ist also

$$x = \mu, \quad y = 2\mu, \quad z = 3\mu \quad \text{und} \quad u = 4\mu\,.$$

die Lösungsmenge ist demnach

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ 2\mu \\ 3\mu \\ 4\mu \end{pmatrix} \,\middle|\, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right]$$

(was wir beim Rechnen stur nach GAUSS vielleicht sogar einfacher erhalten hätten), und das ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$.

l) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$2x - y + az = a, \quad 2ax + y - 2z = 0 \quad \text{und} \quad 2x + ay - 2z = 0\,!$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Lösungsmenge ein Vektorraum?

Lösung: Wir subtrahieren die erste Gleichung a-mal von der zweiten und einmal von der dritten; die Ergebnisse sind

$$(a+1)y - (2+a^2)z = -a^2 \quad \text{und} \quad (a+1)y - (2+a)z = -a\,.$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen wiederum ist

$$(a^2 - a)z = a^2 - a\,.$$

Falls $a^2 - a = 0$ ist, d.h. $a = 0$ oder $a = 1$, steht hier $0z = 0$, woraus überhaupt nichts folgt; andernfalls können wir durch $a^2 - a$ kürzen und erhalten $z = 1$. Dies setzen wir ein in die Gleichung

$$(a+1)y - (2+a)z = -a \Longrightarrow (a+1)y = (2+a) - a = 2\,.$$

Für $a = -1$ ist diese Gleichung (und damit das gesamte Gleichungssystem) unlösbar; für $a \neq -1$ erhalten wir

$$y = \frac{2}{a+1}\,.$$

Das können wir in die erste Gleichung einsetzen und erhalten

$$x = \frac{1}{a+1}\,.$$

Für $a \notin \{0, 1, -1\}$ besteht die Lösungsmenge also die einelementige Menge

$$\mathcal{L}_a = \left\{ \left(\frac{1}{a+1}, \frac{2}{a+1}, 1 \right) \right\}\,.$$

Für $a = -1$ ist das Gleichungssystem unlösbar, d.h. $\mathcal{L}_{-1} = \emptyset$.
Bleiben noch die Fälle $a = 0$ und $a = 1$. Hier können wir z frei wählen, etwa $z = \lambda$, und dann gilt

$$(a+1)y - (2+a)z = -a \Longrightarrow (a+1)y = (2+a)\lambda - a\,.$$

Für $a = 0$ folgt $y = 2\lambda$, was in die erste Gleichung eingesetzt auf $x = \lambda$ führt, d.h.

$$\mathcal{L}_0 = \big\{ (\lambda, 2\lambda, \lambda) \bigm| \lambda \in \mathbb{R} \big\}\,.$$

Für $a = 1$ folgt entsprechend $2y = 3\lambda - 1$, d.h. $y = \frac{1}{2}(3\lambda - 1)$, was auf $x = \frac{1}{4}(\lambda + 1)$ führt. Somit ist

$$\mathcal{L}_1 = \big\{ \big(\frac{1}{4}(\lambda+1), \frac{1}{2}(3\lambda - 1), \lambda \big) \bigm| \lambda \in \mathbb{R} \big\}\,.$$

Nur $\mathcal{L}_0$ ist ein Vektorraum.